A) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1. $\displaystyle\int e^{(\pi+1)x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$

3. $\displaystyle\int 7^{2x}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\log^3 x}{x}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x\log^3 x}\,dx$

7. $\displaystyle\int \sin(2x)\sin(\pi x)\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx \qquad$ (sugg.: $1=\cos^2 x+\sin^2 x$)

9. $\displaystyle\int \cos x\sqrt{\sin x}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}e^{\sqrt{\sin x}}\,dx$

B) Calcolare i seguenti integrali definiti:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^{1} x^2 3^{x^3}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(-x)\cos(7x)\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(4x)\sin x\,dx$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^6 x\,\sin^3 x\,dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\sin 2x} \cos 2x \, dx$

8. $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left| \frac{\log x}{x} \right| dx$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left| \frac{\arctan x}{1+x^2} \right| dx$

10. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left| \frac{x^3}{1+x^8} \right| dx$ (sugg.: $x^8 = (x^4)^2$, $(x^4)' = \dots$)

C) Dire se le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \\ 1+x^2 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,2] \cap \mathbb{Q} \\ 9-x^3 & \text{se } x \in [0,2] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

sono integrabili in $[0,2]$, giustificando la risposta, ed eventualmente calcolare $\int_0^2 f(x)dx$ e/o $\int_0^2 g(x)dx$. Si determinino tutti i punti di $[0,2]$ in cui f e g risultano continue e i punti in cui le loro funzioni integrali (se esistono!) sono derivabili.

Suggerimento. Si noti che

$$g(x) \begin{cases} = 0 & \text{se } x \in [0,2] \cap \mathbb{Q} \\ \geq 1 & \text{se } x \in [0,2] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si deduca che, per ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i] \subset [0,2]$, vale

$$\inf_{[x_{i-1},x_i]} g = 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{[x_{i-1},x_i]} g \geq 1\,.$$

Usare questo fatto per dedurre che, per ogni suddivisione $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[0,2]$, le somme inferiore e superiore di g relative a $\mathcal{D}$ soddisfano

$$s(\mathcal{D}, g) = 0, \quad S(\mathcal{D}, g) \geq 2\,.$$

Si concluda che g non è integrabile secondo Riemann su $[0,2]$.

D) Dimostrare che la funzione

$$F(x) := \int_7^x \frac{3t}{1+(\arctan t)^2}\, dt$$

è di classe C^1 su $\mathbb{R}$; calcolare la derivata F'. Dimostrare che F ammette un unico punto di minimo (assoluto) su $\mathbb{R}$ ed esibire tale punto.

E) Dimostrare che la funzione

$$F(x) := \int_3^x \arctan(t|t|)\, dt$$

è di classe C^1 su $\mathbb{R}$. Calcolare la derivata F' e il valore $F'(-1)$.

F) Dimostrare che la funzione

$$F(x) := \int_0^x \sin(t^2)\, dt$$

è di classe C^1 su $\mathbb{R}$; calcolare la derivata F'. Dimostrare che F ammette un unico punto di massimo nell'intervallo $[0, 2]$ ed esibire tale punto.

G) Dimostrare che la funzione

$$F(x) := \int_{-e^x}^{x^3} \frac{1+t^2}{1+|t|}\, dt$$

è ben definita, continua e strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Dedurre che, qualsiasi sia l'intervallo $[a, b]$, F assume massimo e minimo su $[a, b]$ nei punti (rispettivamente) b ed a.

H) Dimostrare che la funzione

$$F(x) := \int_{x^2}^{\arctan x} (t^2 + |t|)\, dt$$

è derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Calcolare F' ed il valore $F'(0)$.

I) Dimostrare che la funzione

$$F(x) := \int_{\tan^2 x}^{e^x} \log(\cosh t)\, dt$$

è ben definita per $x \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Dimostrare che F è anche derivabile su tale intervallo e calcolare F'.

L) Si consideri la funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) := \int_1^{e^{x-1}} \frac{t}{(1+t^2)^3}\, dt\,.$$

Calcolare $h'(1)$. Studiare la monotonia di h e trovare tutti i punti di massimo e minimo relativo. Dimostrare che il polinomio di Taylor di $h(x)$ di grado 2 centrato in $x = 1$ è

$$\frac{1}{8}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2$$

(sugg.: se si conosce h', si conosce anche h''). Dimostrare che h è invertibile su $\mathbb{R}$ e, detta h^{-1} la sua inversa, si dimostri che $(h^{-1})'(0) = 8$ (sugg.: ricordare la formula per la derivata dell'inversa di una funzione).

M) a) Per il teorema di Heine-Cantor richiamato a lezione, la funzione $f(x) = x^2$ è uniformemente continua su ogni intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato $[a, b]$. Si dimostri che, al contrario, f NON è uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$ (illimitato).
Suggerimento. Dobbiamo dimostrare che esiste $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esistono x_δ ed y_δ tali che

$$|x_\delta - y_\delta| < \delta \quad \text{ma} \quad |f(x_\delta) - f(y_\delta)| = |x_\delta^2 - y_\delta^2| \geq \epsilon\,.$$

Si considerino allora $\epsilon = 1$, $x_\delta = 2/\delta$ e $y_\delta = x_\delta + \delta/2$.

b) Si dimostri che la funzione $f(x) := 1/x$ è continua ma non uniformemente continua su $]0, 1]$ (intervallo limitato ma non chiuso!)
Suggerimento. Come prima, dobbiamo dimostrare che esiste $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esistono x_δ ed y_δ tali che

$$|x_\delta - y_\delta| < \delta \quad \text{ma} \quad |f(x_\delta) - f(y_\delta)| = |\tfrac{1}{x_\delta} - \tfrac{1}{y_\delta}| \geq \epsilon\,.$$

Si considerino allora $\epsilon = 1$, $x_\delta = \min\{1, \delta\}$ e $y_\delta = \min\{1, \delta\}/2$.