

Appello 2/7/2013 - fila A

Esercizio 1

a) Abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^3 + 3x^2 + 18x + 9}{(9+x^2)x^2} dx &= \int \frac{(2x^3 + 18x) + 2x^3 + 2x^2 + (x^2 + 9)}{(x^2 + 9)x^2} dx \\&= \int \left[\frac{2x \cancel{(x^2 + 9)}}{\cancel{(x^2 + 9)} x^2} + \frac{2x}{x^2 + 9} + \frac{2}{x^2 + 9} + \frac{1}{x^2} \right] dx \\&= 2 \log |x| + \log(x^2 + 9) + \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

Abbiamo sfruttato l'integrale

$$\int \frac{1}{x^2 + K^2} dx = \frac{1}{K} \arctan\left(\frac{x}{K}\right) + C \quad \forall K \in \mathbb{R}, K \neq 0.$$

Esercizio 2

Utilizziamo il criterio del confronto asintotico con la serie di termine generale

$$K^{25+36d^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{K^3} \right)^2 \right]^{2d} \cdot \left(\frac{1}{K^5} \right)^5 = \frac{1}{K^{-36d^2+12d}}$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{K^{25+36d^2} \left(1 - \cos \frac{1}{K^3} \right)^{2d} \log \left(1 + \frac{1}{K^5} \right)^5}{K^{25+36d^2} \left[\left(\frac{1}{K^3} \right)^2 \right]^{2d} \left(\frac{1}{K^5} \right)^5} \\&= \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - \cos \frac{1}{K^3}}{\left(\frac{1}{K^3} \right)^2} \right]^{2d} \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{K^5} \right)}{\frac{1}{K^5}} \right)^5 = \left(\frac{1}{2} \right)^{2d} \cdot 1 \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

Questo implica che la serie è a termini definitivamente

positivi; per confronto asintotico, la serie proposta è convergente (rispettivamente, divergente) se e solo se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-36\alpha^2+12\alpha}} \text{ è conv. (resp, div.)}$$

$$\Leftrightarrow -36\alpha^2 + 12\alpha \geq 1 \quad (\Leftrightarrow \quad 36\alpha^2 - 12\alpha + 1 < 0$$

$(\geq)$
 $(>)$

$$\Leftrightarrow (6\alpha - 1)^2 < 0$$

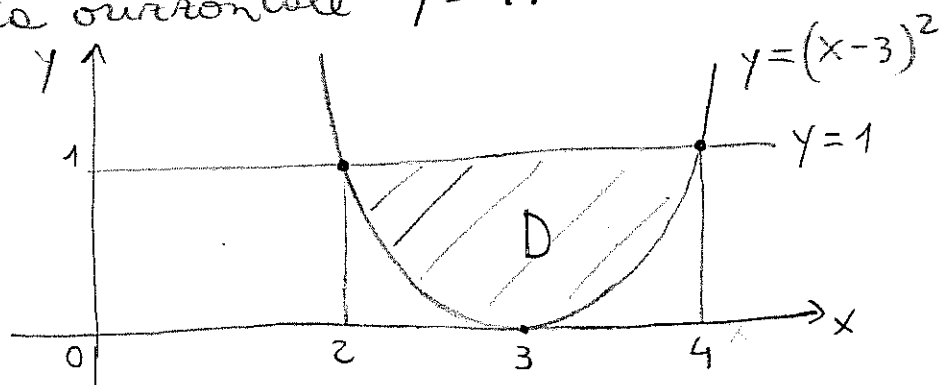
$(\geq)$

Poiché $(6\alpha - 1)^2 \geq 0 \quad \forall \alpha$, la serie proposta è sempre divergente

Esercizio 3

a) Poiché f è continua e D è chiuso e limitato, f assume massimo e minimo assoluti su D .

Il dominio D è "racchiuso" tra la parabola $y = (x-3)^2$ e la retta orizzontale $y = 1$.



Si verifica facilmente che i punti di intersezione tra la parabola $y = (x-3)^2$ e la retta $y = 1$ sono i punti $(2, 1)$ e $(4, 1)$.

Cominciamo cercando candidati max/min nella parte interna $\overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 < y < 1\}$. Poiché f ammette derivate parziali $f'_x(x, y) = y(2x-6)$ e $f'_y(x, y) = 3+x^2-6x$ su tutto $\mathbb{R}^2$, è sufficiente cercare

i punti critici:

$$\begin{cases} y(2x-6)=0 \rightarrow y=0 \text{ opp } x=3 \\ 3+x^2-6x=(x-3)^2=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

(TUTTI i punti della
retta $x=3$ sono critici!)

Pertanto, i punti critici di f in D sono tutti e soli i punti della forma $(3, y)$ con $0 \leq y \leq 1$.

Il bordo ∂D si può esprimere come unione di un segmento
 $a = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 4\}$ e di un arco di parabola

$$b = \{(x, (x-3)^2) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 4\}.$$

Cercare candidati max/min di f su a si riduce a cercare
max/min di $g(x) := f(x, 1) = 3 + x^2 - 6x = (x-3)^2$ per $x \in [2, 4]$.

Si verifica facilmente che g assume massimo in $x=2$ e $x=4$
e minimo in $x=3$; essi corrispondono ai candidati

$$(2, 1), \quad (3, 1) \quad \text{e} \quad (4, 1).$$

Cercare candidati max/min di f su b si riduce a cercare
max/min di $h(x) := f(x, (x-3)^2) = (x-3)^4$ per $x \in [2, 4]$.

Si verifica facilmente che h assume massimo in $x=2$ e $x=4$
e minimo in $x=3$; essi corrispondono ai candidati

$$(2, 1), \quad (3, 0) \quad \text{e} \quad (4, 1).$$

Calcoliamo il valore di f in ciascun candidato;

$$f(3, y) = 0 \quad \forall y \in (0, 1)$$

$$f(2, 1) = f(4, 1) = 1$$

$$f(3, 1) = f(3, 0) = 0.$$

Pertanto, f assume massimo assoluto su D nei punti
 $(2, 1)$ e $(4, 1)$ ed assume minimo assoluto su D nei punti
 $(3, y)$ con $0 \leq y \leq 1$.

b) Poiché

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y, 0) = \lim_{y \rightarrow +\infty} 9y = +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y, 0) = \lim_{y \rightarrow -\infty} 9y = -\infty,$$

deduciamo che $\sup_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = +\infty$ e che $\inf_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = -\infty$.

Pertanto, f non ammette né massimo né minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4

b) Abbiamo

$$F'(x) = \frac{e^{5x-x^5} + (5x-x^5)^2}{2 + \cos(5x-x^5)} \underbrace{(5-5x^4)}_{=(5x-x^5)'} = (5x-x^5)'$$

c) Studiamo il segno di $F'(x)$. Poiché

$$\underbrace{e^{5x-x^5}}_{>0} + \underbrace{(5x-x^5)^2}_{\geq 0} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2 + \cos(5x-x^5) \geq 2-1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

abbiamo

$$F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 5-5x^4 = 5(1-x^4) = 5 \underbrace{(1+x^2)}_{>0} (1+x)(1-x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$F'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ oppure } x \leq -1.$$

In particolare, F è decrescente su $[-3, -1]$ e crescente su $[-1, 0]$; pertanto, il minimo di F su $[-3, 0]$ è assunto in $x = -1$.