

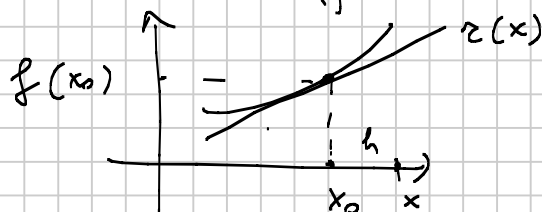
Lezione del 10 Novembre

Derivate

Def. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo
è derivabile in $x_0 \in I$ se esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \quad \text{derivata di } f \text{ in } x_0$$

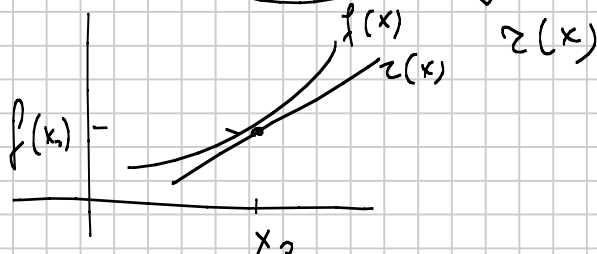
$f'(x_0) = m$
coeff.
angolare
della $\tau(x)$



$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow \\ x \rightarrow x_0}} = \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{h \rightarrow 0} \quad x - x_0 = h$$

La def di derivata si può scrivere anche

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\tau(x)} + o(x - x_0) \quad x \rightarrow x_0$$



$$- f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

funzione
"derivata" di f .

$$- f(x) = e^x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = e^{x_0}$$

$$f'(x) = e^x$$

$$- f(x) = a^x \quad \dots \Rightarrow \text{prevoi} \quad f'(x) = a^x \log a$$

$$- f(x) = \sin x$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cosh + \cos x_0 \sinh - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x_0 \left(\frac{\cosh - 1}{h} \right) + \cos x_0 \underbrace{\frac{\sinh}{h}}_1 =$$

$$\left(\frac{\cosh - 1}{h^2} \cdot h \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \left(\frac{\cosh - 1}{h^2} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

$$= \cos x_0$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\cosh - 1}{h} = \frac{-\frac{h^2}{2} + o(h^2)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$- f(x) = \cos x \Rightarrow \text{prevoi} \quad f'(x) = -\sin x$$

$$- f(x) = \log x \quad x > 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{h}{x}} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \left(\frac{\frac{h}{x} \rightarrow 0}{x \cdot h \rightarrow 0} \right) \quad \left(\frac{\log(1+y)}{y} \rightarrow 1 \right)_{y \rightarrow 0}$$

$$f(x) = \log x, \quad x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

es. $f(x) = \log_a x$

Oss. $f(x)$ derivabile $\forall x \in I$

$f'(x)$ funzione derivata def. $\forall x \in I$

se $f'(x)$ è continua $\Rightarrow$ dico che $f(x) \in C^1(I)$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow e^x \in C^1(\mathbb{R})$$

$f(x) = \sin x, \cos x, x^n, \log x$ sono C^1 dove sono definite

Teorema

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \Rightarrow$
 f è continua in x_0 .

Dim. se f è derivabile in x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(x-x_0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\substack{\text{perché funzioni} \\ \text{infinitesime}}}$$

$\searrow$ (se $x \rightarrow x_0$)

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{cioè } f \text{ è continua in } x_0.$$

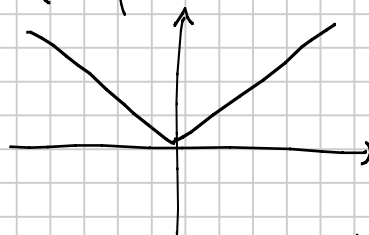
#

Oss. Non vale il viceversa

f è continua in x_0 $\nRightarrow$ f è derivabile in x_0 .

es. $f(x) = |x|$

$x_0 = 0$



f è continua in $x=0$ ma non è derivabile in $x=0$.
 $(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

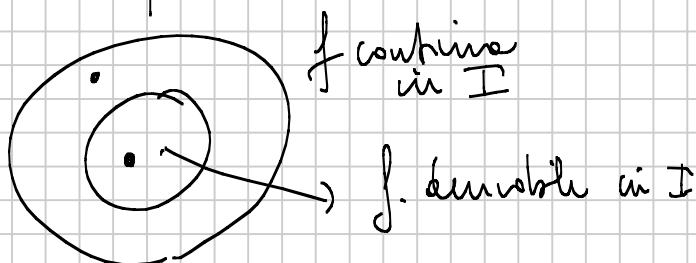
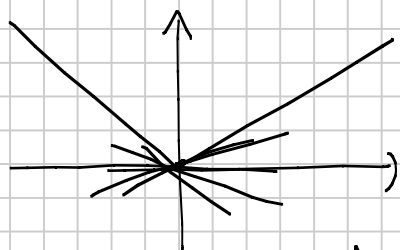
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

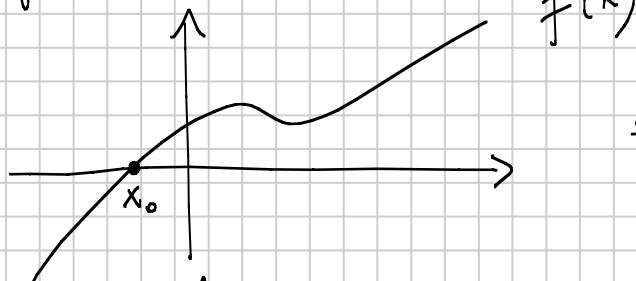
$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Rightarrow$ la funzione $|x|$ non è derivabile in $x=0$.

in $x=0$ $\nexists$ la retta tangente al grafico



oss. A proposito del $|f(x)|$

$f(x)$



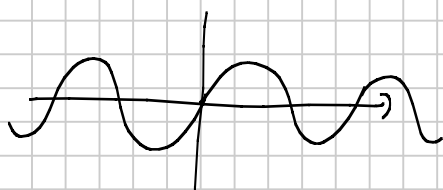
f è derivabile in x_0

$|f(x)|$



$|f|$ non è derivabile in x_0

per es. $f(x) = \sin x$ derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$
 $f'(x) = \cos x$



$|\sin x|$ non è derivabile in

$x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

oss. con la def. è più difficile dim. la continuità di f in x_0 .

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \quad x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0) \quad x \rightarrow x_0$$

$$f(x) = |x|$$

Derivate destra e sinistra di f in x_0

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{derivate destra di } f \text{ in } x_0$$

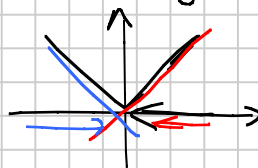
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{derivate sinistra di } f \text{ in } x_0$$

f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ e sono uguali

es. $f(x) = |x|$

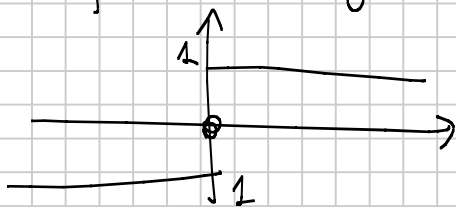
$$f'_+(0) = 1$$

$$f'_-(0) = -1$$



$\exists$ ma sono diverse $\Rightarrow f$ non è derivabile

es. $f(x) = \text{sgn } x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



dove è derivabile.

$f(x)$ è continua $\forall x \neq 0$.

se $x > 0$ $f(x) = 1$ $f'(x) = 0$

se $x < 0$ $f(x) = -1$ $f'(x) = 0$

f è derivabile $\forall x \neq 0$.

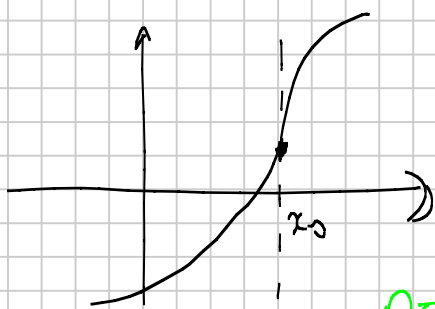
Si studia la derivabilità di una f solo nei p.t. in cui f è continua.

Notazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad f \text{ non è derivabile in } x_0$$

scrivo $f'(x_0) = +\infty$
oppure $f'(x_0) = -\infty$
(con abuso di notazione).

In questo caso il grafico ha tangente verticale in $x = x_0$



$$m = f'(x_0)$$

eq. retta tg.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$0 \leftarrow \frac{y - f(x_0)}{\frac{f'(x_0)}{+ \infty}} = x - x_0$$

la retta tangente al grafico è $x = x_0$

(retta verticale passante per x_0).

es. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

f è derivabile in $x_0 = 0$?

f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

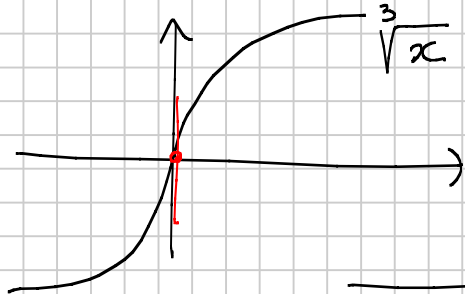
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

f non è derivabile in $x = 0$

$$f'(0) = +\infty$$

$$(x^2)^{1/3} \rightarrow 0^+$$

$x = 0$ è un p.t. in cui ha tangente verticale per $\sqrt[3]{x}$



$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ f continua in x_0 .

• f è derivabile in x_0 $(\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0})$
finito

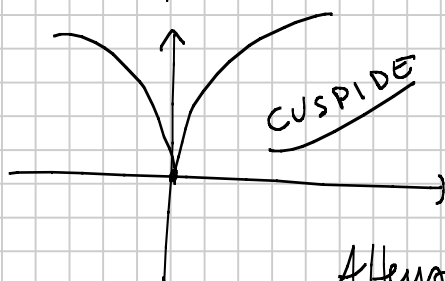
• $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono diversi (anche infiniti).

a) uno dei due limiti è finito
 $\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ si chiama ANGOLOSO
($f(x) = |x|$)

b) un limite è $+\infty$ e uno è $-\infty$
allora $(x_0, f(x_0))$ si chiama
($f(x) = \sqrt{|x|}$) CUSPIDE

c) se entrambi sono $+\infty$
(oppure $-\infty$)
si chiama tangente verticale
($f(x) = \sqrt[3]{x}$)

$f(x) = \sqrt{|x|}$ Dominio = $\mathbb{R}$



$$f'_+(0) = +\infty$$

$$f'_-(0) = -\infty$$

Fate voi!

Alternativa per $x < 0$

$$f(x) = \sqrt{-x}$$

Teorema "Algebra" delle derivate.

f, g derivabili in $x_0 \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

1) $\alpha f(x)$ è derivabile in x_0 e
 $(\alpha f(x_0))' = \alpha f'(x_0)$.

2) $f(x) \pm g(x)$ è derivabile in x_0 e
 $(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.

3) $f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in x_0 e
 $(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

4) $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0 (se $g(x_0) \neq 0$)
$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Es. • $f(x) = 3x^7$

$$f'(x) = 3 \cdot 7 x^6 = 21x^6$$

• $f(x) = e^x + 8 \sin x$

$$f'(x) = e^x + 8 \cos x$$

• $f(x) = (\cos x) \cdot x$

$$f'(x) = (-\sin x) \cdot x + \cos x \cdot 1$$

• $f(x) = \frac{e^x}{2x+1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(2x+1) - e^x(2+0)}{(2x+1)^2} = \\ &= \frac{2xe^x + e^x - 2e^x}{(2x+1)^2} = \frac{2xe^x - e^x}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\cdot f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Teo. Derivazione di funzione composta
(regole della catena)

f derivabile in x_0 , g derivabile in $f(x_0)$
allora $g \circ f$ è derivabile in x_0

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

es. $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

$$h'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$