

Lezione del 11 Dicembre

Integrazione di funzioni razionali

1) $\int \frac{1}{Ax+B} dx = -\frac{1}{A} \log(Ax+B) \quad | \quad Ax+B=t$

2) $\int \frac{1}{Ax^2+Bx+C} dx$

$$Ax^2+Bx+C=$$

due soluzioni

$$\Delta > 0$$

nessuna soluzione

$$\Delta < 0$$

una soluzione

$$\Delta = 0$$

$$Ax^2+Bx+C=$$

$$= A(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\frac{1}{Ax^2+Bx+C} = \frac{\alpha}{(x-x_1)} + \frac{\beta}{(x-x_2)}$$

Frazioni semplici

$$Ax^2+Bx+C > 0$$

$$\Delta < 0$$

$$\left(\quad \right)^2 + 1$$

completamento del quadrato

$$Ax^2+Bx+? =$$

$$= \left(\quad \right)^2$$

ci rimane all'

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \arctg(x)$$

3) $\int \frac{1}{x^2+2x+1} dx =$ $x^2+2x+1=0$
 $\Delta = 1-1=0$

$$= \int \frac{1}{(x+1)^2} dx =$$

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

$$x+1=t$$
$$dx = dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x+1} + K.$$

Morele $\int \frac{1}{Ax^2+Bx+C} dx =$: $Ax^2+Bx+C=0$
 allora $\Delta = 0.$

$$Ax^2+Bx+C = A(x-x_1)^2$$

$$\int \frac{1}{A(x-x_1)^2} dx = -\frac{1}{A} \frac{1}{(x-x_1)} + K.$$

Altro caso

$$\int \frac{x}{Ax^2+Bx+C} dx$$

prime case

$$Ax^2+Bx+C=0$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ \Delta = 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

es $\int \frac{x}{x^2+x+1} dx$

$$x^2+x+1=0$$

$$\Delta = 1-4 < 0$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

fatto ieri

$$x^2+x+1 = t$$

$$(2x+1)dx = dt$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log |x^2+x+1| =$$

In totale

$$= \log(x^2 + x + 1)$$

$$\int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\dots)$$

fatto ieri

Modello

$$\int \frac{x}{Ax^2 + Bx + C} dx \quad \text{con } \Delta < 0$$

si moltiplica e somma opportunamente numeri t.c. al numeratore compare

$$2Ax + B$$

si ottengono due integrali

$$\int \frac{2Ax + B}{Ax^2 + Bx + C} dx + \int \frac{D}{Ax^2 + Bx + C} dx$$

= E

Metodi di ieri

$$2) \int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

(come ieri)

$$= \int \frac{x}{(x-2)(x-3)} dx$$

si può usare direttamente la decomposizione in frazioni semplici

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$= \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$\forall x$

$$= \frac{x(A+B) - 3A - 2B}{(x-2)(x-3)}$$

Due polinomi sono uguali $\forall x$ se i coefficienti relativi ai termini dello stesso grado sono uguali

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = -3A - 2B \end{cases}$$

$$A = -\frac{2}{3}B$$

$$-\frac{2}{3}B + B = 1$$

$$\frac{1}{3}B = 1$$

$$B = 3$$

$$A = -2$$

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx &= -2 \int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{x-3} dx \\ &= -2 \log|x-2| + 3 \log|x-3| + K \end{aligned}$$

Modello

$$\int \frac{x}{Ax^2 + Bx + C} dx$$

dove $Ax^2 + Bx + C = 0$
 $\Delta > 0$

x_1, x_2

$$\frac{x}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{x}{A(x-x_1)(x-x_2)} =$$

$$= \frac{1}{A} \left(\frac{\alpha}{(x-x_1)} + \frac{\beta}{(x-x_2)} \right)$$

parti semplici

dove α e β sono da determinare.

$$3) \int \frac{x}{x^2 + 2x + 1} dx =$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$x = -1$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$2x+2$ è la derivata di x^2+2x+1

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 - 2}{x^2 + 2x + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{\underbrace{x^2+2x+1}_{=t}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-2}{x^2+2x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+1) - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+1) + \frac{1}{(x+1)} + K$$

Es.

$$\int \frac{3x+5}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{3x}{x^2-5x+6} dx + \int \frac{5}{x^2-5x+6} dx$$

$$= 3 \int \frac{x}{x^2-5x+6} dx + 5 \int \frac{1}{x^2-5x+6} dx$$

Coro
fatto
sfr

Coro
fatto
Deri

$$\boxed{\int \frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} dx}$$

Es.

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+5} dx$$

$$e^x = t$$

$$e^x dx = dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2+2t+5} dt$$

$$\Delta = 1-5 < 0$$

$$\begin{aligned} t^2+2t+5 &= t^2+2t+1-1+5 \\ &= (t+1)^2+4 \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{t^2 + 2t + 5} dt = \int \frac{1}{(t+1)^2 + 4} dt$$

$$= \int \frac{1}{4 \left(\left(\frac{t+1}{2} \right)^2 + 1 \right)} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{t+1}{2} \right)^2 + 1} dt$$

$$\frac{t+1}{2} = y$$

$$\frac{1}{2} dt = dy$$

$$dt = 2 dy$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy$$

$$= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{t+1}{2} \right) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{e^x + 1}{2} \right) + K$$

es. $\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \dots$ P.C.
integrale $\int$ non risolubile.

ES. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$, $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 2}$

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 + x + 1} dx$$

$$\int \frac{3e^x}{e^{2x} + 4e^x + 6} dx$$

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + x}$$

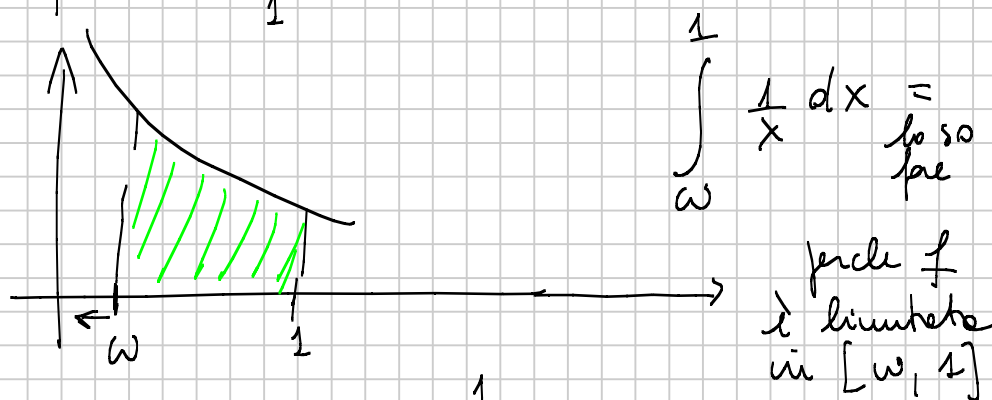
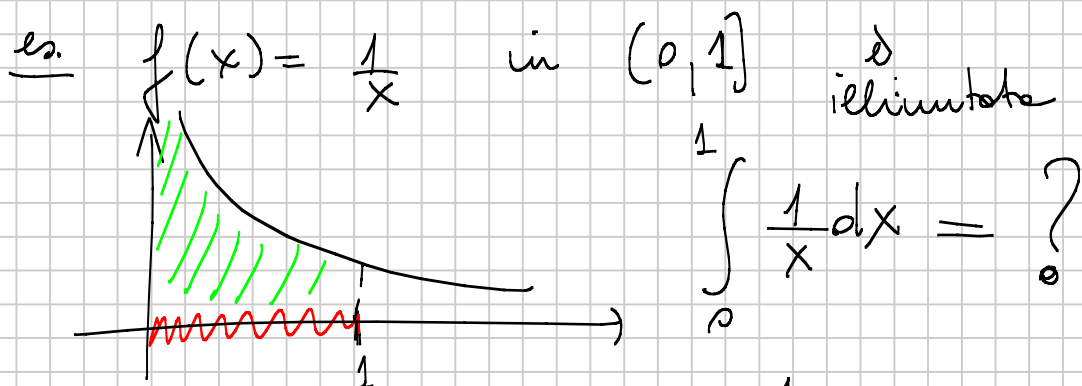
$$x^2 + x = x(1+x)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx, \int \frac{x}{x^2 + x - 6} dx$$

Integrali generalizzati (o impropri)

Integrali di Riemann

- 1) f limitata in $[a, b]$
- 2) $[a, b]$ limitato

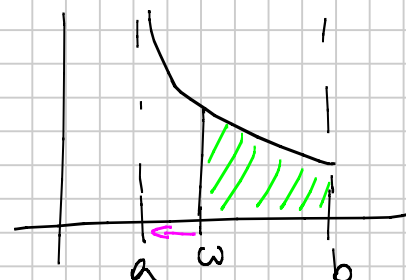


$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \doteq \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \int_{\omega}^1 \frac{1}{x} dx$$

Integrazione di funzioni NON limitate in intervalli limitati $[a, b]$

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua t.c. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \lim_{\omega \rightarrow a^+} \int_{\omega}^b f(x) dx$$



Def. 1) Se il limite esiste finito $\Rightarrow f$ è integrabile in $[a, b]$

$\int_a^b f(x) dx$ converge
(rappresenta l'area sotto il grafico)

di f tra a e b , che è una regione illimitata.

2) Se il limite $= \pm\infty$ $\int_a^b f(x)dx$ è divergente.

3) Se il limite $\neq$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \neq$.

es. $f(x) = \frac{1}{x}$ in $(0, 1]$

Vogliamo sapere se $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ è convergente o divergente

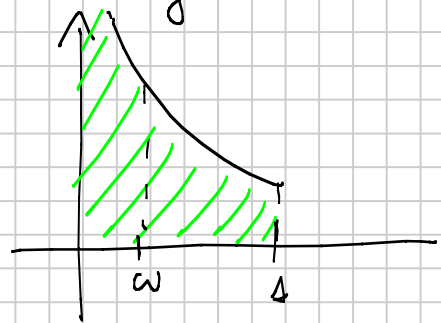
$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{w \rightarrow 0^+} \int_w^1 \frac{1}{x} dx =$$

$$= \lim_{w \rightarrow 0^+} \left(\log x \right) \Big|_w^1 =$$

$$= \lim_{w \rightarrow 0^+} (0 - \log w) =$$

$$= \lim_{w \rightarrow 0^+} (-\log w) = +\infty$$

diverge.



es. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

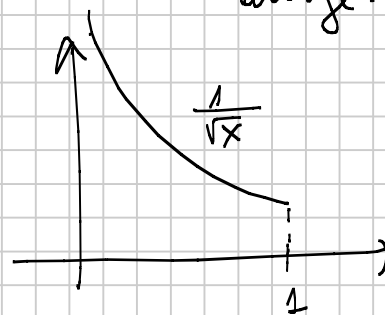
$$= \lim_{w \rightarrow 0^+} \int_w^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \lim_{w \rightarrow 0^+} \left(2x^{1/2} \right) \Big|_w^1 = \lim_{w \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{w})$$

$$= 2$$

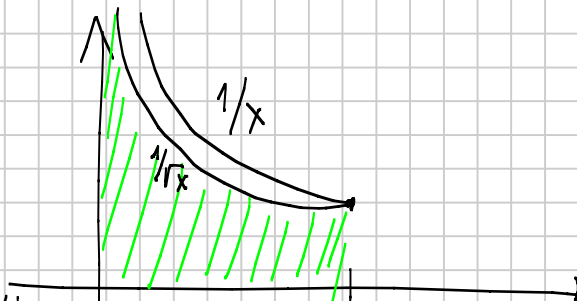
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

cioè l'integrale CONVERGE.

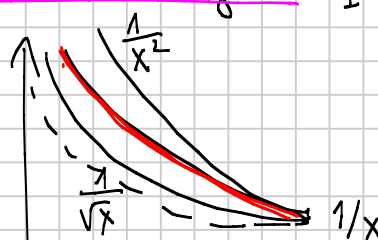


$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty \quad \text{area infinita}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \quad \text{area finita}$$



Dipende dalla "velocità" di convergenza
a $+\infty$ per $x \rightarrow 0^+$



Quello che si può dimostrare

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge se } \alpha < 1$$

es. $\int_0^1 \frac{1}{x^{2/5}} dx$ converge.

$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ diverge.

$\frac{1}{x^\alpha}$ saranno le nostre "funzioni campione"

Criteri di integrabilità

- 1) Se conosciamo una funzione di $f(x)$
si usa la definizione

$$\lim_{\omega} \int_{\omega} f(x) dx = \dots$$

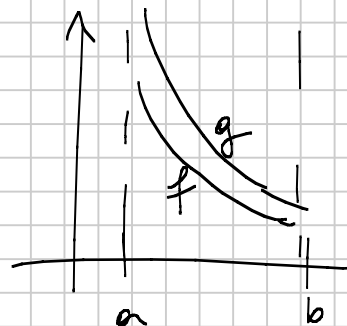
- 2) In generale non si riesce a trovare la
primitiva ma si può riuscire lo stesso
a capire se la funzione è integrabile o no.

Criterio del confronto

$f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$\begin{aligned} f &\rightarrow +\infty \\ g &\rightarrow +\infty \end{aligned} \quad \text{as } x \rightarrow a^+$$

$$0 \leq f \leq g$$



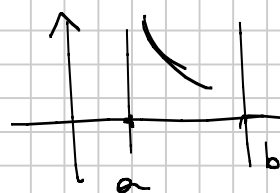
1) Se g è integrabile in $[a, b] \Rightarrow f$ è integrabile in $[a, b]$

2) Se f non è " " $\Rightarrow g$ non è " " .

Criterio del confronto asintotico

$f, g > 0$ t.c. $f \sim g$ $x \rightarrow a$

$$\begin{aligned} f &\rightarrow +\infty \\ g &\rightarrow +\infty \end{aligned} \quad \text{as } x \rightarrow a^+$$



f è integrabile $\Leftrightarrow g$ è integrabile in $[a, b]$.

es. in $[0, 1]$

$$\frac{1}{x^\alpha}$$

$$\text{es. } \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$$

è integrabile?

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \rightarrow +\infty \quad \text{as } x \rightarrow 0^+$$

è illimitata in $[0, 1]$

$x \rightarrow 0$ $\sin x \sim x$

$$\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

diverge