

Lezione del 11 Novembre

Giovedì 13 Novembre NO ricevimento.
e freno lezione 10.30-12.00.

Derivate

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n & n \in \mathbb{N} & & x \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= n x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & \text{derivabile } \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & \text{"} & & \text{"} \\ f'(x) &= \cos x \\ f(x) &= \cos x \\ f'(x) &= -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x & \text{derivabile } \forall x > 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Operazioni sulle derivate

$$(af)' = a f' \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad , \quad g(x) \neq 0.$$

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

regola della
catena.

Teo. f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0 .

Si studia la derivabilità solo nei f.t. in cui f è continua.

Se in x_0 f non è derivabile

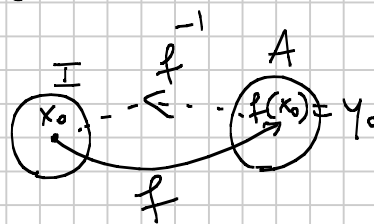
1) l'hi angoloso : uno dei due limiti
(dx o sx) è finito.

2) cuspidi : uno è $+\infty$ e l'altro è $-\infty$

3) jump e f. vertice se entrambi
sono $+\infty$
o $-\infty$.

Teo. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile
in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$. Allora
 f^{-1} è derivabile in
 $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$



dove
 $y_0 = f(x_0)$

oss.

$$f(f^{-1}(y_0)) = y_0$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1}(y))' = 1$$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\forall y \in A$$
$$x \xrightarrow{f(x)=y} y$$

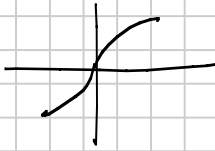
$$f^{-1}(y) = x$$

Esempio di applicazione

$$\bullet \quad f(x) = e^x = y \quad f^{-1}(y) = \log y = x$$
$$e^x = y \Leftrightarrow x = \log y$$

$$(f^{-1}(y))' = (\log y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

perché $e^x = y$

• $f(x) = \sin x \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 

$f^{-1}(y) = \arcsin y$

$$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$$
$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad y \in (-1, 1)$$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = (\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x}$$

Vogliamo una
espressione che
dipende da y

cioè da $y = \sin x$

Vogliamo cioè scrivere

$\cos x$ in funzione di $\sin x$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

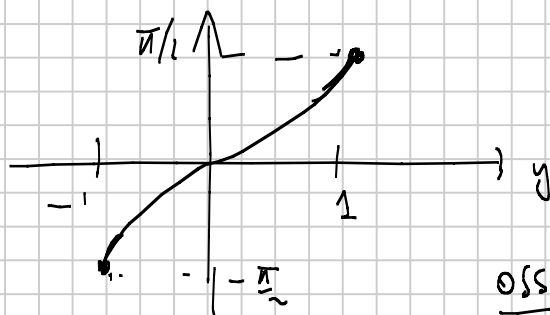
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - y^2}$$

perché $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x > 0$

$$\Rightarrow \cos x = +\sqrt{1 - y^2}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad \text{è def. } \forall \quad y \in (-1, 1)$$



$$\arcsin y$$
$$y \in [-1, 1]$$

oss. Se $y \rightarrow \pm 1$

$$(\arcsin y)' \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ in $y = 1$ e $y = -1$ il grafico
si "attecca" con tangente verticale.

Quindi $f(x) = \arcsin x$ è continua in $[-1, 1]$

ma è derivabile in $(-1, 1)$.

Analoga mente (fate voi)

$$f^{-1}(y) = \arccos y = x \quad f(x) = \cos x \\ \Leftrightarrow y = \cos x \\ x \in [0, \pi].$$

dimostrare

$$(\arccos y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\arccos y$ non è derivabile per $y = \pm 1$

• $f(x) = \tan x \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

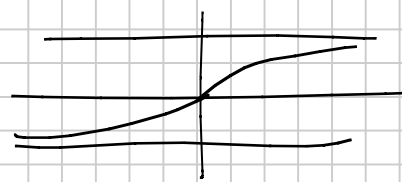
$$f^{-1}(y) = \arctan y$$

$$x = \arctan y \Leftrightarrow y = \tan x$$

$$(f^{-1}(y))' = (\arctan y)' = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$$



$\arctan y$ è derivabile $\forall y \in \mathbb{R}$

Esercizi

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

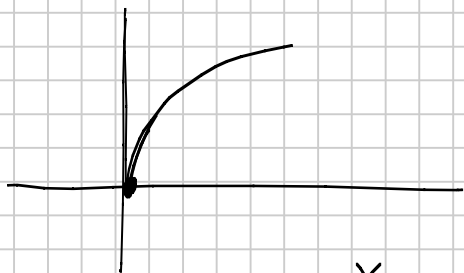
$$x^n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = e^{\alpha \log x}$$

$$f'(x) = e^{\alpha \log x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} \\ = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad f'(x) = -1 x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0 \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



$$f'(0) = +\infty$$

non è derivabile in $x=0$

$$\bullet \quad f(x) = x^x = e^{x \log x}$$

$$f'(x) = e^{x \log x} \cdot \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\log x + 1)$$

In generale

$$h(x) = \left(f(x) \right)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$$

$$h'(x) = e^{g(x) \log f(x)} \cdot \left(g' \log f + g \cdot \frac{f'}{f} \right)$$

$$(\log f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

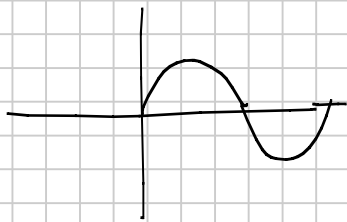
$$\bullet \quad \underline{\text{es.}} \quad h(x) = (\sec x)^{\cos x} \quad \text{dove } \sec x \text{ è definita}$$

trovare i f.h. in cui f è derivabile
e in tali f.h. calcolare la derivata.
e calcolare l'eq. della retta tangente
al grafico di $h(x)$ nel punto

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Domínio di $h(x) = \{ x : \sec x > 0 \}$
perciò $h(x)$ è periodica di periodo 2π

studia la derivabilitate în un punct.



$$D = (0, \pi)$$

în D $h(x)$ este continuă.

$$h(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \log(\sin x)}$$

$$h'(x) = e^{\cos x \log(\sin x)} \cdot \left(-\sin x \cdot \log(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right) \quad \sin x > 0$$

$\Rightarrow h(x)$ este derivabilă în $(0, \pi)$.

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$f(x) = \cosh x \Rightarrow f'(x) = \sinh x$$

Fata
vrai

$$f(x) = \frac{3^{\sin^2 x} \cosh(x^2 - 3)}{\operatorname{arcsin}(\log x^3)}$$

dove este
definită
calcularea
 f' .

$$f'(x) = \frac{\operatorname{arcsin}(\log x^3) [\text{derivata numărătorului}] - 3^{\sin^2 x} \cosh(x^2 - 3) [\text{derivata numitorului}]}{(\operatorname{arcsin}(\log x^3))^2}$$

$$\text{derivata numărătorului} = (3^{\sin^2 x} \cdot \cosh(x^2 - 3))'$$

$$= \left(3^{\operatorname{sen} 2x} \cdot \log 3 \cdot \cos(2x) \cdot 2 \cdot \cosh(x^2-3) + 3^{\operatorname{sen} 2x} \cdot \operatorname{senh}(x^2-3) \cdot 2x \right)$$

$$\text{derivata denominatore} = \left(\operatorname{arcsen}(\log x^3) \right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\log x^3)^2}} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\bullet f(x) = \operatorname{arctg}((\operatorname{sen} x)^2)$$

$$f' = \frac{1}{1 + (\operatorname{sen} x)^4} \cdot 2(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$$

Fare $f(x) = x^{\log(\operatorname{sen} x)}$

$$f(x) = \frac{\operatorname{senh}(\operatorname{arctg} x)}{(\log x)^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(e^{x^2}) + 3 \cos(5^x)$$

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{e^x}{\operatorname{sen} 3x}\right)$$

Esercizio

$$f(x) = e^{|x-1|} = \begin{cases} e^{x-1} & x \geq 1 \\ e^{1-x} & x < 1 \end{cases}$$

Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$ nel suo dominio.

$$D = \mathbb{R} \quad \begin{matrix} x > 1 \\ x = 1 \\ x < 1 \end{matrix} \quad f \text{ è continua}$$

$$\rightarrow \frac{1}{1}$$

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{1-x} = 1 \quad \text{noi}$$

f è continua in $x=1$, $\bar{e}$ continua su $\mathbb{R}$.

Studiamo la derivabilità su $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x > 1 \\ e^{1-x} & x < 1 \end{cases}$$

se $x > 1$ $f(x) = e^{x-1}$ è derivabile e
 $f'(x) = e^{x-1} \cdot 1 = e^{x-1}$

se $x < 1$ $f(x) = e^{1-x}$ è derivabile
 $f'(x) = e^{1-x} \cdot (-1) = -e^{1-x}$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x > 1 \\ -e^{1-x} & x < 1 \end{cases}$$

per studiare la derivabilità di f in $x=1$
 si deve calcolare $f'_+(1)$ e $f'_-(1)$

e vedere se $\exists$ e se sono uguali

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

si può dimostrare che questo è

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \quad f' \text{ in } x > 1$$

In questo caso $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{x-1} = 1$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f' =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-e^{1-x}) = -1$$

$$f'_+(1) = 1 \neq f'_-(1) = -1$$

In $x=1$ la f non è derivabile e $x=1$ è un punto angoloso.

Abbiamo visto per l'esercizio precedente con il metodo $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f'(x)$ perché vale

Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 interno a I
 f continua in x_0 e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$
 Allora

• Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f' = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'$)
 allora f è derivabile in x_0

• Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = l_1$ $l_1 \neq l_2$
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = l_2$ (anche $\pm \infty$)

allora f non è derivabile in x_0

es. $f(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$

f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

f è derivabile $\forall x \neq 0$ e

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

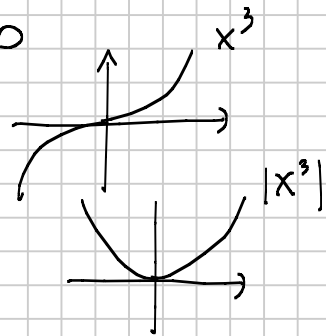
Vediamo se è derivabile in $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f' = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f' = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-3x^2)$$

f è derivabile anche in $x=0$ e $f'(0)=0$
 cioè.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

oss. $f(x) = |x^3|$



$f(x) = \sin x$

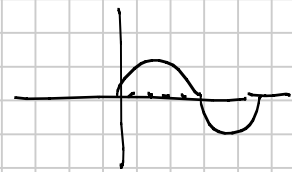


es. $f(x) = |\sin x|$ vedere se è derivabile dove è continua.

$f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$. Consideriamo solo un intervallo di periodo $[0, 2\pi]$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \sin x \geq 0 \\ -\sin x & \sin x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, \pi] \\ -\sin x & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$



$x \in (0, \pi)$ $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$

$x \in (\pi, 2\pi)$ $f(x) = -\sin x$ $f'(x) = -\cos x$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x \in (0, \pi) \\ -\cos x & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

in $x = \pi$ la $f(x)$ è derivabile?

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f' = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cos x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} f' =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} (-\cos x) = 1$$

Quindi $f(x)$ non è derivabile in $x = \pi$ dove c'è uno sfogo



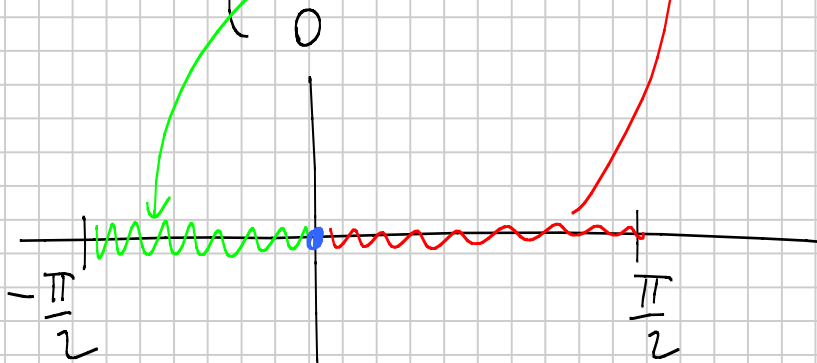
Es.

$$f(x) = \begin{cases} x \log \sqrt{\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x}} & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ (\cos x)^{\frac{2}{x^2}} & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

$$x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

$$x = 0$$



Studiare la continuità di $f(x)$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

1) $f(x)$ è continua $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$
per le operazioni sulle funzioni continue.

2) $f(x)$ è continua in $x = 0$?

$$? \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log \sqrt{\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x)^{\frac{2}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log \left(\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x} \right)$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x} \rightarrow 2$$

$$\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1}{x} \cdot x$$

$$\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x} \quad \text{there a zero come } x$$

$$x \log \sqrt{\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x}} \rightarrow \sim x$$

$$x \log \sqrt{x} = \frac{x}{2} \log x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0^+$$

$$x \log \sqrt{\left(\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x}\right)} = \frac{1}{2} x \log \left(\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} x \left(\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x}\right) \log \left(\frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x}\right) \cdot \left(\frac{1 - \cos x}{x^2 \sin x}\right)$$

$$t \log t \rightarrow 0 \quad t \rightarrow 0 \quad t = \frac{x^2 \sin x}{1 - \cos x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2} x \left(\frac{1 - \cos x}{x^2 \sin x}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{limiti notevoli}$$

$$\boxed{} \cdot \frac{1}{4} = 0 \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x)^{\frac{2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{2}{x^2} \log(\cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^2} \log(\cos x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^2} \log(1 + \cos x - 1) =$$

$$\log(1+t) \rightarrow 1 \quad t \rightarrow 0$$

$$0 \quad x \rightarrow 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^2} \cdot \frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{(\cos x - 1)} \cdot (\cos x - 1)$$

$$2 \frac{\cos x - 1}{x^2} \rightarrow -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x)^{\frac{2}{x^2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

f non è continua in $x=0$, è
solo continua da
destra