

Lezione del 12 Novembre

Ricerca di massimi e minimi locali

• MASSIMO e MINIMO ASSOLUTO (GLOBALE)

M massimo assoluto per $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

x . $\exists x_1: f(x_1) = M$

• $f(x_1) = M \geq f(x), \forall x \in X$

analog. m minimo assoluto ...

$x_1 =$ p.to di massimo globale
(p.to di minimo ")

oss. M è unico ma i pnt. di massimo possono essere anche infiniti.



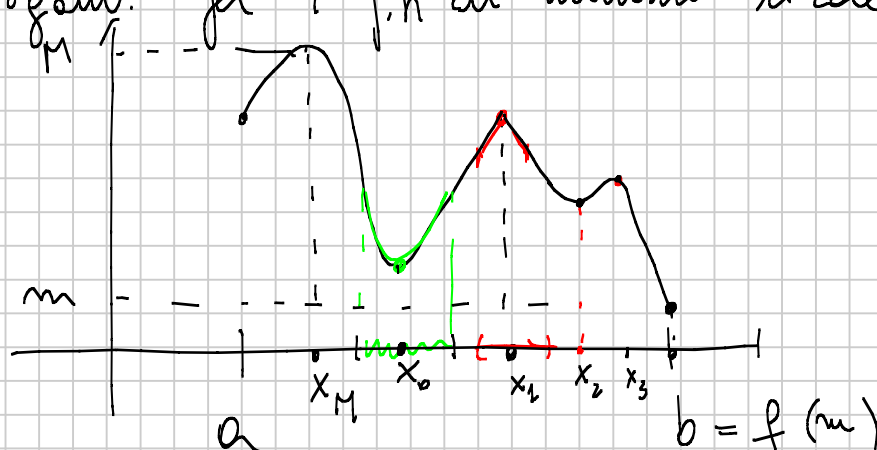
$$f(x) = \sin x$$

$$M = 1$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

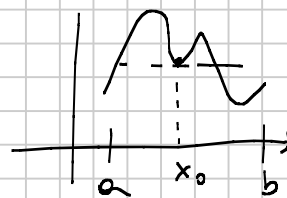
Def. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. x_0 è p.to di massimo locale (relativo) di f se $\exists$ intorno di x_0 t.c. $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in U$.
 $f(x_0)$ massimo locale (relativo).

Analogam. per i p.to di minimo locale.



x_0 p.to di minimo locale

x_1 | l.o. di massimo locale

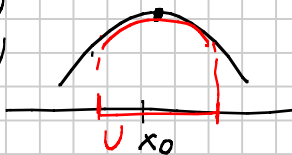


Teorema di Fermat

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f derivabile in x_0 e f ha un estremo locale in x_0 (cioè x_0 è l.o. di max o min locale).
 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Dim. facciamo le dim. per x_0 l.o. di max locale.

$\exists U$ di x_0 t.c. $f(x_0) \geq f(x)$
 $\forall x \in U$



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad x > x_0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad x < x_0$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

per il teorema delle permanenze del segno
 $(g(x) \geq 0 \text{ in un intorno di } x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq 0$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

per la permanenza del segno.

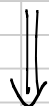
$$f'_+(x_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad f'_-(x_0) \geq 0$$

poiché f è derivabile in x_0

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

≤ 0

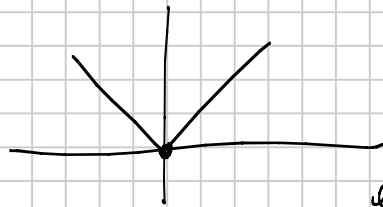
≥ 0



$$f'_+(x_0) \stackrel{\Downarrow}{=} f'_-(x_0) = 0 = f'(x_0)$$

oss. Se f non è derivabile in x_0 il teorema non è vero. ~~✗~~

$$f(x) = |x|$$



ha in $x=0$
ha un p.t.
di minimo globale
e quindi locale

ma f' non esiste in $x=0$ e
quindi non vale il teorema
di Fermat

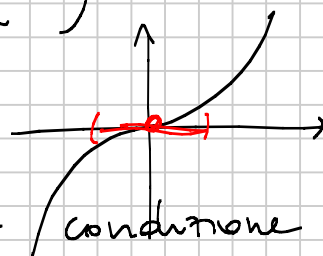
oss. Non vale il contrario, cioè se in
 $x_0 : f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ p.t. di
estremo locale

$$f(x) = x^3$$

$$x_0 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$



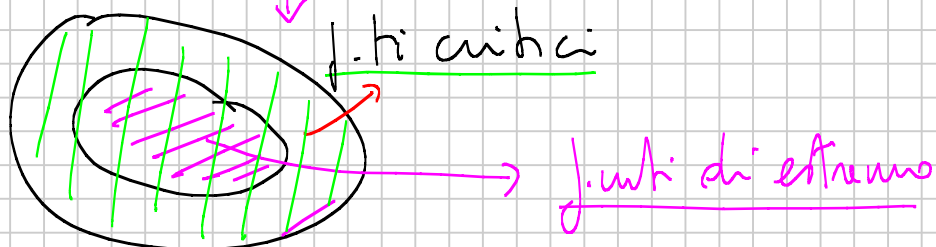
oss. Il Teo. di Fermat è una condizione
necessaria perché un punto in cui f è derivabile
sia un estremo locale. (ma non è
una condizione sufficiente).

Quindi i punti di estremo locale in
cui f è derivabile si cercano tra i punti
in cui $f' = 0$.

Def. x_0 si dice punto critico o stazionario
per f se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$

Teo. di Fermat x_0 p.t. di estremo locale per f
 $\Rightarrow x_0$ è un p.t. critico

Per i punti in cui f è derivabile

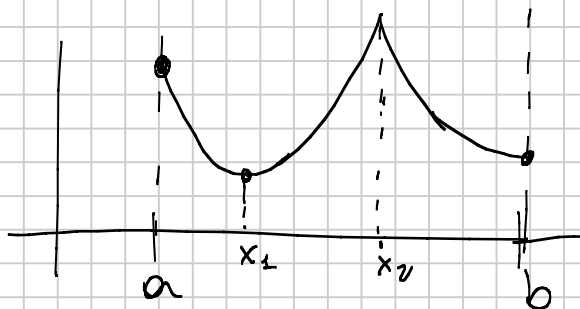


OSS. Se x_0 è un p.to di estremo locale per f può succedere:

- 1) $x_0 \in (a, b)$, f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
- 2) x_0 è in un estremo dell'intervallo
- 3) f non è derivabile in x_0

$x = a$ p.to di max locale

x_1 p.to di min locale in cui f è derivabile
 $\Rightarrow f'(x_1) = 0$



x_2 p.to di max globale (e quindi locale) nel quale f non è derivabile

$x = b$ p.to di minimo locale

es. $f(x) = \sin x$ $\mathbb{R}$

f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$

Troviamo i p.to critici cioè (stationari)

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \cos x = 0$$

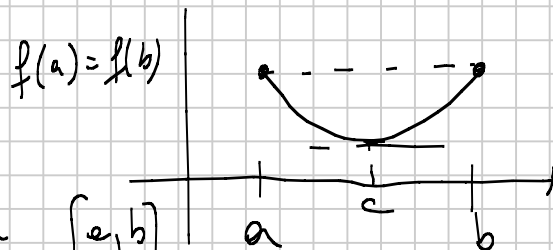
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

punti critici

I punti di estremo locale (punti di min. e max. locale) li cerco in questo insieme.

Teorema di Rolle

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$
è derivabile in (a, b) t.c. $f(a) = f(b)$.
Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = 0$.



Dim. f continua in $[a, b]$
chiusa e limitato $\Rightarrow$ per il Teorema di
Weierstrass $\exists M = \max_{[a, b]} f$ e $m = \min_{[a, b]} f$

Ciò $\exists x_1 \in [a, b]: f(x_1) = M$ e
 $\exists x_2 \in [a, b]: f(x_2) = m$

1) $M = m \Rightarrow f(x)$ è costante in $[a, b]$
 $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

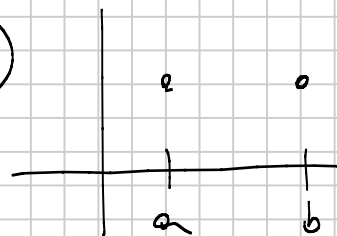
2) $M > m$ ^{ordini} $f(a) = f(b)$

uno dei due (M o m)

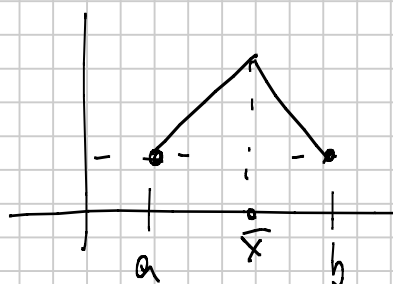
deve essere assunto all'interno

per es. $x_1 \in (a, b)$ (oppure x_2)

però applicare il Teorema di Fermat
e dire che $f'(x_1) = 0$.



oss. Se f non è derivabile in tutto
 (a, b) il Teorema non è vero.



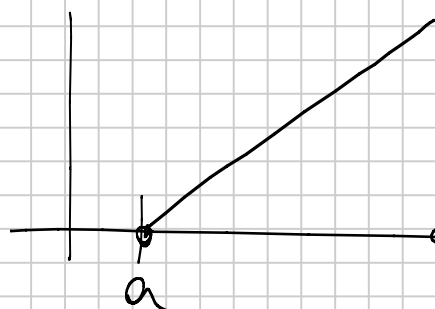
f continua in $[a, b]$

$f(a) = f(b)$

f è derivabile in (a, b)
tranne che in c

$\Rightarrow \nexists c$ t.c. $f'(c) = 0$.

oss. Se f non è continua in tutto $[a, b]$ non è vero.



f è continua in $[a, b]$
 f è derivabile in (a, b)

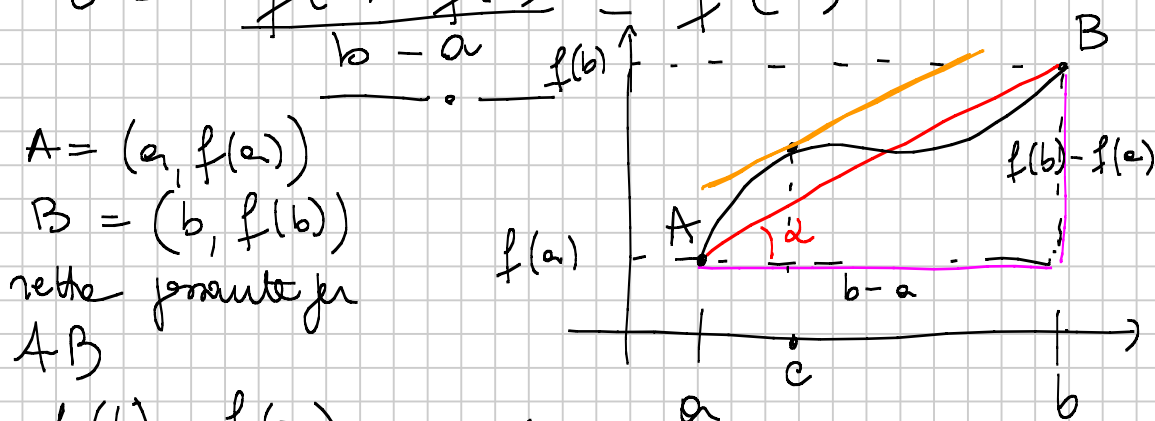
$$f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow \nexists c \text{ t.c. } f'(c) = 0$$

Teorema di Lagrange (del valor medio)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora $\exists c \in (a, b)$

$$\text{t.c. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



$$A = (a, f(a))$$

$$B = (b, f(b))$$

retta secante per A e B

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{coeff. angolare della retta secante per A e B} = \tan \alpha$$

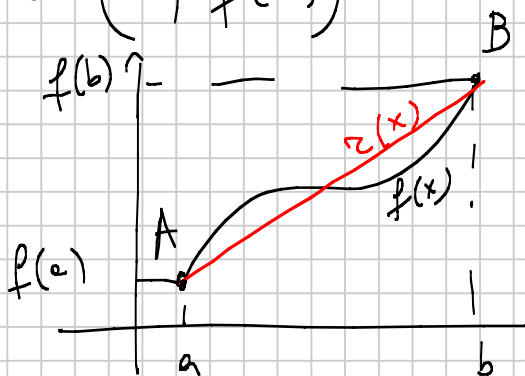
$f'(c)$ è la pendenza della retta t_f al grafico in $(c, f(c))$.

Dim.

retta secante per A e B

$$A = (a, f(a))$$

$$B = (b, f(b))$$



$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

eq. della
retta
passante per
A e B!

$$h(x) = f(x) - \tau(x) =$$

$$= f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right]$$

• $h(x)$ continua in $[a, b]$

• $h(x)$ derivabile in (a, b)

$$h(a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \left(f(b) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a} (b - a) \right)$$

$$= 0$$

• $h(a) = h(b) = 0$

Possiamo applicare il teorema di Rolle (siamo nelle ipotesi giuste)

$$\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$$

$$h(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right]$$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

#

