

Lezione del 13 Novembre

Def. punto di estremo locale.

Teo. di Fermet : se x_0 estremo locale
e in x_0 f è derivabile $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Teo. di Rolle : se f è continua in $[a, b]$
e derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$
 $\Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Teo. di Lagrange : f continua in $[a, b]$
e derivabile in (a, b) . $\exists c \in (a, b)$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se la funzione è "liscia" c'è un punto
in cui la variazione media è uguale
alla variazione istantanea.

Teorema Test di monotonia

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in (a, b)

i) f crescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$
 $\forall x \in (a, b)$

ii) f decrescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$
 $\forall x \in (a, b)$

iii) $\begin{matrix} f'(x) > 0 \\ \forall x \in (a, b) \end{matrix} \Rightarrow f \text{ è strett.} \\ \text{crescente} \\ \text{in } (a, b)$

iv) $\begin{matrix} f'(x) < 0 \\ \forall x \in (a, b) \end{matrix} \Rightarrow f \text{ è strett.} \\ \text{decrescente} \\ \text{in } (a, b)$

Dim f crescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

$\Rightarrow$ h.p. f crescente in (a, b)
Ts $f'(x) \geq 0$ in (a, b)

x, y ^{per cui} ~~la~~ ^{funzione} $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \Rightarrow \\ \text{per la} \\ \text{regola} \end{array} \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

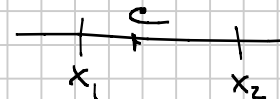
$$\Leftrightarrow \text{H.p. } f'(x) \geq 0 \quad \Rightarrow f'(x) \geq 0.$$

Ts f crescente in (a, b)

Vogliamo dim. che $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$
 $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$?

per il teorema di Lagrange, $\exists c \in (x_1, x_2)$

$$0 \leq f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



$\downarrow$ per ipotesi

Quindi $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$ e poiché $x_2 > x_1$

$$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

iii) se $f'(x) > 0$ in $(a, b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente.

Ts. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

stessa dim. di sopra ma in questo caso

$$f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

oss. Perché bisogna usare Lagrange e non a fin fine con la def. di limite

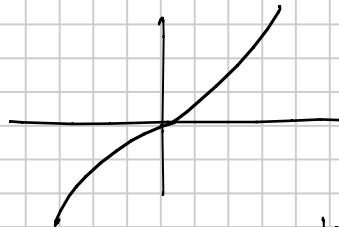
H.p. $f'(x) \geq 0$ in $(a, b) \Rightarrow$ Ts. f crescente in (a, b)

$$\downarrow \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \not\Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

oss. iii) e iv) valgono solo in una direzione.

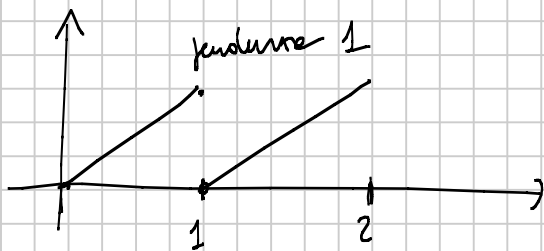
se $f(x)$ è strutt. crescente in (a, b) ~~$f'(x) > 0$~~ in (a, b)

$$f(x) = x^3$$



è strutt. crescente
ma $f'(x) = 3x^2 \geq 0$
ma non > 0
infatti in $x=0$ $f'(0)=0$.

oss. Il test di monotonia vale solo se siamo su un intervallo.



f derivabile in $(0, 2)$ $\setminus \{x=1\}$

$$f'(x) = 1 > 0$$

ma punti in cui esiste

ma f non è crescente in $(0, 2)$

Teorema funzioni a derivata nulla.

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b)

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f \text{ è costante in } (a, b)$$

Dim. $\Leftarrow$ banale (dalla def. di derivata).

$\Rightarrow$ $x_1, x_2 \in (a, b)$ qualsiasi

Lagrange $\exists c \in (x_1, x_2)$ t.c.

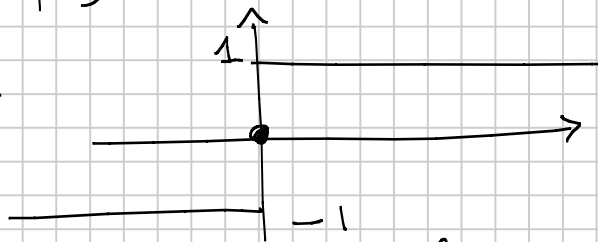
$$0 = f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

$\Rightarrow f$ è costante

~~///~~

Oss. è importante che f sia derivabile
in tutto (a, b) senno non è vero

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$



$$f'(x) = 0$$

$\forall x$ dove f è derivabile me $f(x)$ non è
costante su tali x .

Il test di monotonia ci serve anche
per stabilire la natura dei p.ti
critici (stazionari) cioè i punti
t.c. $f'(x) = 0$.

Se $x_0 : f'(x_0) = 0$

se $x < x_0$ (in un intorno $\forall x$ di x_0)

$$f'(x) \leq 0$$

$\Rightarrow f$ è decrescente
in $\checkmark$

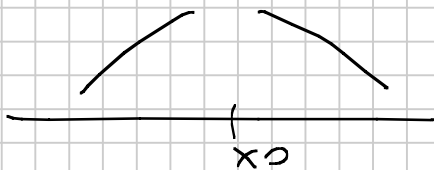
se $x > x_0$ (in un intorno $\forall x$ di x_0)

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ è crescente in } \checkmark$$

x_0 p.t. di minimo locale

e x_0 p.t. di max. locale

$$\begin{aligned} & \text{e } f'(x) \geq 0 \text{ a dx di } x_0 \text{ (in un intorno)} \\ & \text{e } f'(x) \leq 0 \text{ a dx } \text{''} \text{ ('')} \end{aligned}$$



Es. $f(x) = \sin x$

$D = \mathbb{R}$ derivabile su $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nette di questi punti

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ $f'(x) > 0$

$\cos x = f'$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ $f'(x) < 0$

$f \cdot h$ stazionari

$\Downarrow f$ è strett. crescente su dx di $\pi/2$

f è strett. decrescente su dx di $\pi/2$

$x = \frac{\pi}{2}$ è p.to di massimo locale

$x = \frac{3\pi}{2}$ è p.to di minimo locale

$f'(x) < 0$ $x < \frac{3\pi}{2}$

$f'(x) > 0$ $x > \frac{3\pi}{2}$

Calcoliamo i valori che ha f come in questi p.to

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \rightarrow \text{max locale}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \rightarrow \text{min locale}$$

$$\text{ma } -1 \leq \sin x \leq 1$$

quindi $1 = \text{massimo globale di } f(x)$

$-1 = \text{minimo}$

quindi $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ p.to di massimo globale

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ " minimo "

Es. • $f(x) = e^x$ derivabile su $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x > 0 \Rightarrow f(x) = e^x$ è strett. crescente in $\mathbb{R}$.

• $f(x) = \arctg x$ derivabile su $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

$\Rightarrow f(x) = \arctan x$ è
strett. crescente
in $\mathbb{R}$

• $f(x) = \log x$ è derivabili
 $\forall x > 0$.
 $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ $(0, +\infty)$
 $\log x$ è strett. crescente
in $(0, +\infty)$.

Asintoti

Definizione

• la retta di equazione $y = y_0$ è un
asintoto orizzontale per f ($a + \infty$ o $a - \infty$)
se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

• la retta di equazione $x = x_0$ è un
asintoto verticale per f se
 $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = -\infty$

• la retta di equazione $y = mx + q$
è un asintoto obliquo ($m \neq 0$)
a $+\infty$ ($0 - \infty$) se

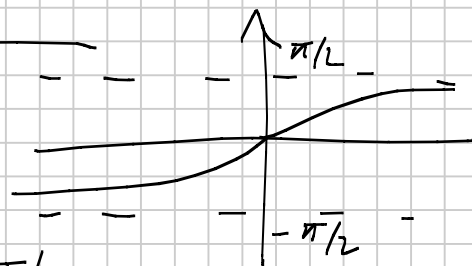
$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q$$

Es. $f(x) = \arctan x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$



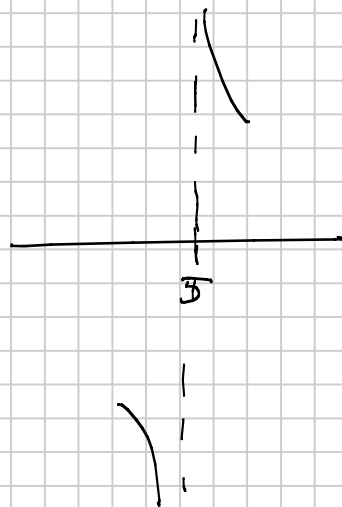
$y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$

$y = -\frac{\pi}{2}$ è " " " per $x \rightarrow -\infty$

Es. $f(x) = \frac{1}{(x-5)^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{(x-5)^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{(x-5)^3} = -\infty$$



$x=5$ asintoto verticale per $f(x)$

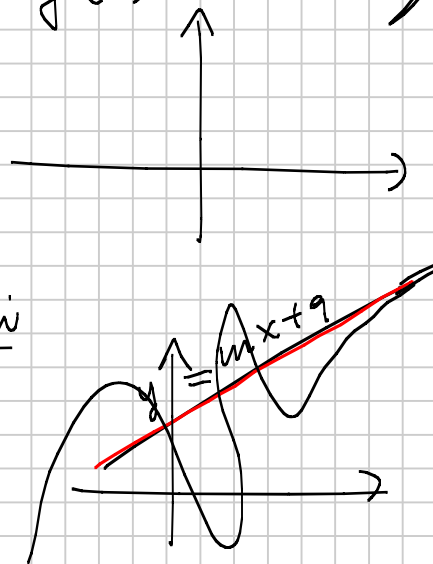
Es. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$D = \mathbb{R}$

$f(x) = f(-x)$ f è pari

Studio per $x \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



f ha un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$?

$$y = mx + q$$

$$\left(f(x) - (mx + q) \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Verifichiamo se $\exists$ finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

e se esiste finito $= m \rightarrow$ coeff. angolare dell'asintoto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q \rightarrow \text{termine noto}$$

$$y = mx + q.$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} \quad (x > 0)$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

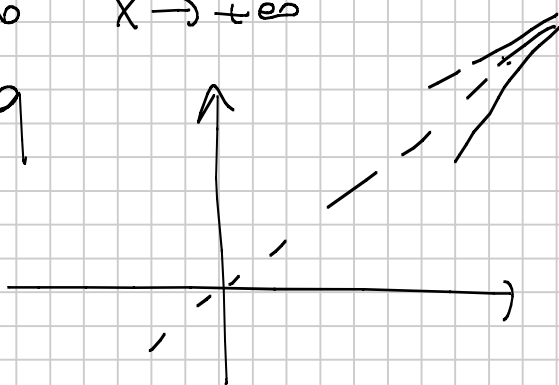
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = 0$$

$\exists$ l'asintoto obliquo $x \rightarrow +\infty$

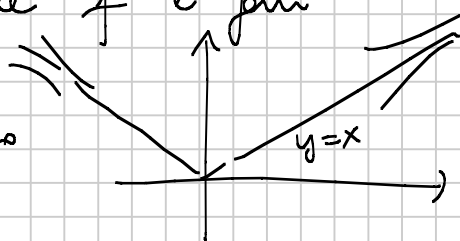
$$y = mx + q$$

$$y = x$$



Per $x \rightarrow -\infty$, poiché f è pari

$y = -x$ è l'asintoto obliquo di $f(x)$.



es. Calcolare lo stesso l'asintoto obliquo di $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ per $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad (m = -1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = q \quad (q = 0)$$

Es. $f(x) = x \log |x|$

cerchiamo di capire come è fatto il grafico.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(-x) = -x \log |-x| = -x \log |x| = -f(x)$$

è dispari

$$(x > 0) \quad f(x) = x \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log x = +\infty$$

asintoto obliquo?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

no asintoto obliquo

$$f(x) = 0 \quad ?$$

$$\frac{x \log x}{x} = 0$$

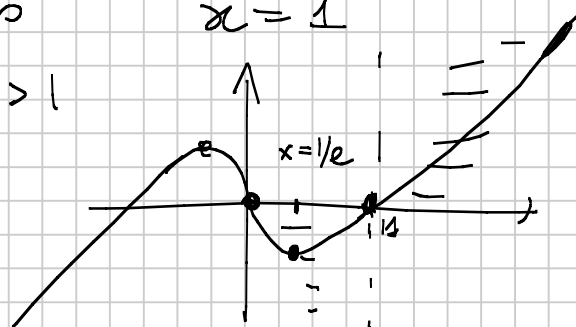
$$\log x = 0$$

$$x = 1$$

$$f(x) > 0$$

$$x \log x > 0 \Rightarrow \log x > 0$$

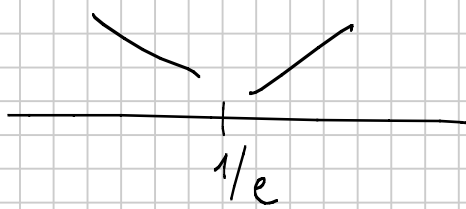
$$\Rightarrow x > 1$$



$$f(x) = x \log x$$

$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1 = 0$$

$$\log x = -1$$



$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$x > 1/e$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \log\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

in $x=0$ si può estendere per
continuità ponendo
 $f(0)=0$

