

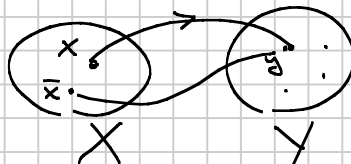
Lezione del 13 Ottobre

Ricriminto (almeno per ottobre)
il giovedì ore 9
in SC40

passo I AM per

FUNZIONI

$f: X \rightarrow Y$
dominio X codominio Y
 $x \in X \rightarrow$ uno e uno solo $y \in Y$
 $y = f(x)$



$$\text{im} f = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$$

$$\text{Im} f \subseteq Y$$

$$\text{graf } f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

f pari:

$$f(x) = f(-x)$$

f dispari:

$$f(x) = -f(-x)$$

Es.

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

$$X = \mathbb{R}$$
$$\text{Im} f = \mathbb{R}$$

Es. $f(x) = \frac{1}{x}$ $X = \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} =$
 $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



~~$\mathbb{R} \setminus 0$~~ No

$\text{Im } f = ? \quad \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists x : y = \frac{1}{x} \right\}$

risolvo in x $y = \frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{y} \rightarrow$ tale x esiste sse $y \neq 0$

$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

es. $f(x) = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x} \quad (\Leftrightarrow) \quad y^2 = x$
 con $y \geq 0$
 $x \geq 0$

$\text{dom } f = X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}^+ : y = \sqrt{x}\}$

$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \Leftrightarrow y \geq 0$

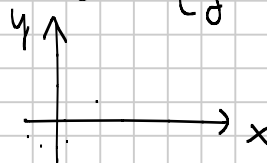
$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$



Funzioni limitate

$f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

funzioni
a variabile
reale ($x \in \mathbb{R}$)
a valori
reali ($y \in \mathbb{R}$)



Def. f è limitata superiormente

(inferiormente) in X se $\exists M > 0$

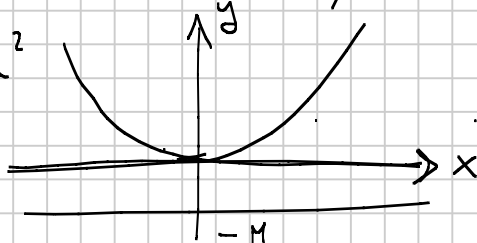
$M \in \mathbb{R}$, t.c. $f(x) \leq M, \forall x \in X$

($f(x) \geq -M, \forall x \in X$)

Def. f è limitata se è limit. infer. e superiormente cioè
 $\exists M \geq 0, M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in X.$

$$(-M \leq f(x) \leq M)$$

es. $f(x) = x^2$
è limitata inferiormente



tutte le costanti $-M, M > 0$ vanno bene perché $f(x) \geq -M$

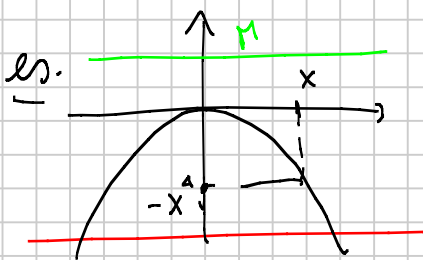
$$f(x) = x^2 \geq 0_M$$



ma non è limitata superiormente

limitata sup: $\exists M \geq 0 : f(x) \leq M \quad \forall x \in X$

non limit. sup: $\forall M \geq 0 \exists x \in X : f(x) > M$



$$f(x) = -x^4$$

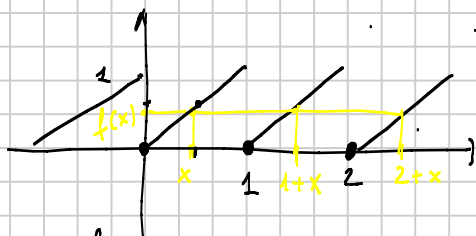
$$x \rightarrow -x^4$$

è limitata superiormente
 ma non inferiormente

es. mantissa di x = parte decimale di un numero reale

$$x = p, d_1 d_2 d_3 \dots$$

$$0, d_1 d_2 \dots d_3$$



$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{Im } f = [0, 1)$$

Def. f è PERIODICA in X se

$$\exists P > 0 :$$

$$f(x+P) = f(x), \quad \forall x \in X$$

e $\inf \{ P > 0 : f(x+P) = f(x) \}$
 è chiamato PERIODO

es. nell'es. delle funzioni monotone

$$f(x+1) = f(x)$$

$$x = 3,18$$

$$f(x) = 0,18$$

$$\bar{x} = 4,18$$

$$f(x) = 0,18$$

Questa funzione ha periodo 1

quindi $P=2$

$$f(x+2) = f(x)$$

$$f(x+5) = f(x)$$

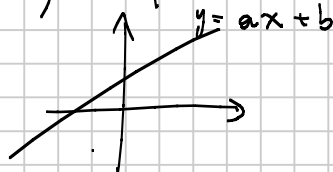
Il periodo è il + piccolo P
cioè in questo caso $P=1$.

Qualche funzione elementare

Funzioni lineari

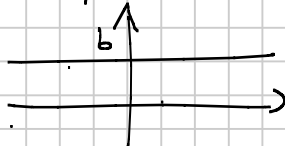
• $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$
 $\text{dom } f = \mathbb{R}$

a coeff.
angolare



$a=0$

$f(x) = b$
costante



$a \neq 0$

$\text{Im } f = \mathbb{R}$

(fate vari!)
 $\forall y \exists x: y = ax + b$
risolvete in x

$a=0$

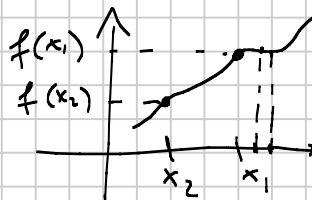
$y = b$

$\text{Im } f = \{b\}$

FUNZIONI MONOTONE

$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

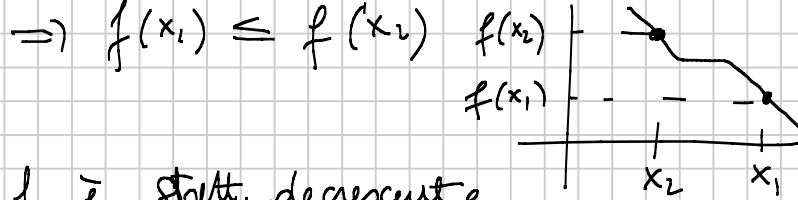
Def. $A \subseteq X$



• f è crescente in A se $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2$
 $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

• f è strettamente crescente in A se
 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

• f è decrescente se $\forall x_1, x_2, x_1 > x_2$



f è strett. decrescente

$\forall x_1, x_2 : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



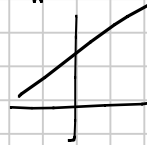
Def. $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è MONOTONA
in $A \subseteq X$ se f è crescente o
decrescente in A , è strettamente
monotona se è strett. crescente
o strett. decrescente in A .

es. $f(x) = x^2$

non è
monotona in $\mathbb{R}$ ma è strett.
monotona in $\mathbb{R}^+$ e in $\mathbb{R}^-$

es. $f(x) = ax + b$

$a > 0$
strett.
crescente
su $\mathbb{R}$



$a < 0$
strett.
decrescente



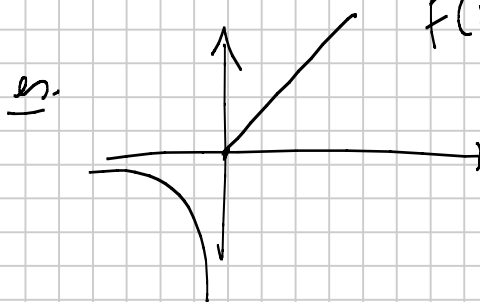
$a = 0$
è crescente e
anche decrescente!



oss. le funzioni costanti sono le
uniche che sono crescenti e
decrescenti in A

$x_1 > x_2$ $f(x_1) \geq f(x_2)$
 $f(x_1) \leq f(x_2)$

$\Downarrow$
 $f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A$



$\text{dom } f = \mathbb{R}$
è monotona?
in $\mathbb{R}$
No!

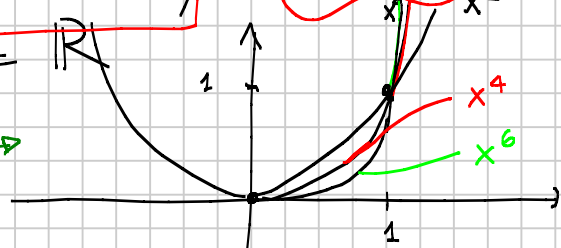
Funzioni Potenza

$f(x) = x^n$

$n \in \mathbb{N}$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

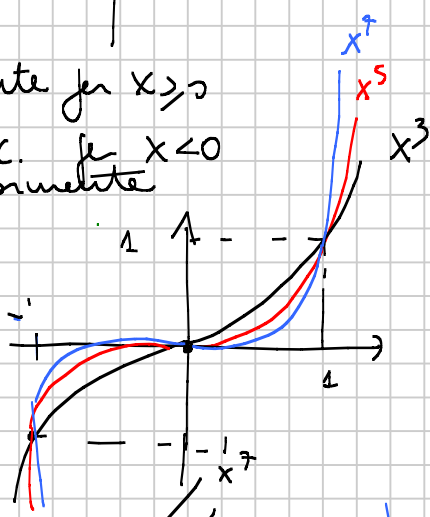
n pari



$\text{Im } f = [0, \infty)$

$\bar{e}$ strett. crescente per $x > 0$
 e decresc. per $x < 0$
 limitata inferiormente

n dispari



strett. monotona
 in $\mathbb{R}$
 non $\bar{e}$
 limitata
 né sup.
 né inf.

$f(x) = x^z, z \in \mathbb{Z}$

$z = \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ -n \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

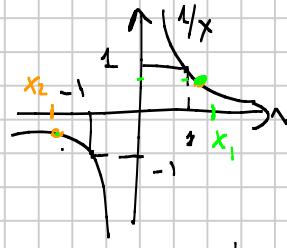
in questo caso
 $\text{dom } f = \{x : x \neq 0\}$

$f(x) = \frac{1}{x^n}$

n dispari f $\bar{e}$ dispari

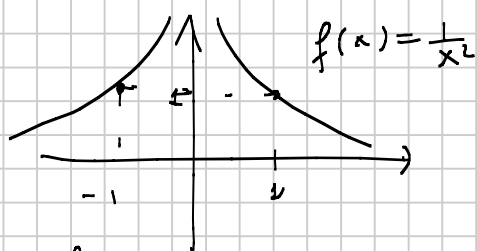
$\text{dom } f = \{x \neq 0\}$

$\text{Im } f = \{y \neq 0\}$



$\bar{e}$ strett. monotona
 solo in $\mathbb{R}^+$ o in
 $\mathbb{R}^-$ ma non su
 tutto $\mathbb{R}$.

n pari $f(x) = \frac{1}{x^n}$ f $\bar{e}$ pari



funzioni ad esponente razionale

$$f(x) = x^r, \quad r \in \mathbb{Q}$$

$$r = \frac{m}{n}$$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$$

prima definisco

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

RADICI
n-esime

$$y = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{possiamo scrivere} \quad y = \sqrt[n]{x}$$

$$y =: x^{\frac{1}{n}}$$

significa

$$y^n = x$$

$$y > 0, \quad n \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si può dimostrare che $\exists!$ y t.c. $y^n = x$
e tale $y =: x^{1/n}$.

$$\text{poiché } y > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$\text{es. } y = x^{1/2} (= \sqrt{x}) \Leftrightarrow x = y^2$$

$$\text{con } x, y > 0$$