

Lezione del 14 Ottobre

Potenze e radici n-esime

$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$
 $\text{dom } f = \mathbb{R}$

f è pari se n è pari
 f è dispari se n è dispari

$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ $\forall x \neq 0$

$f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$ $r = \frac{m}{n}$

caso particolare $m=1$ $r = \frac{1}{n}$

$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$\hookrightarrow$ radice n-esima di x

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = y \Leftrightarrow y^n = x$
se $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$\sqrt{x} = y = x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y^2 = x$

con $x > 0$

oss $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} = y \Leftrightarrow y^3 = x$
 $x > 0$

in questo caso però posso estendere la funzione anche per $x < 0$

$x^{\frac{1}{3}} = -(-x)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{-x}$

se $x < 0$

es. $x = -5$ $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$

Quindi se n è dispari e $x < 0$

$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$

oss. $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ è sempre un numero positivo
perché $x > 0$

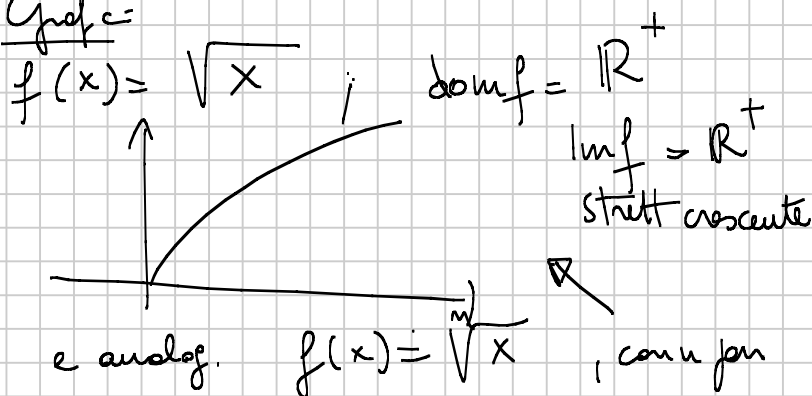
es. $\sqrt{x^2} = \underbrace{|x|}_{>0}$

No! $\sqrt{x^2} = x$ $x = -2$
 $\sqrt{4} = -2$

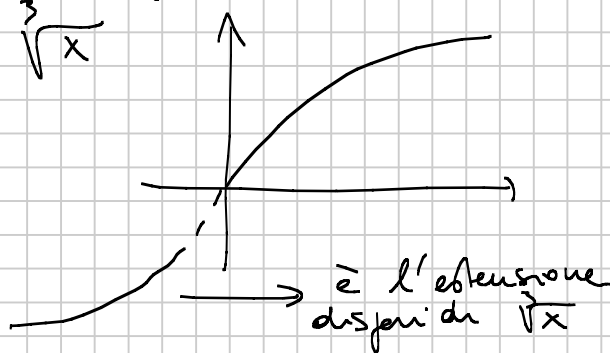
oss. $\sqrt[n]{0} = 0$

Quindi $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ def. $\forall x \geq 0$
 e non estende dispari ~~se~~ n è dispari
 ($\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$, $x < 0$ e n è dispari)
 $f(x) = -f(-x)$

Grafico:



$f(x) = \sqrt[3]{x}$
 $x > 0$



$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$
 $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

sono def. $\forall x \geq 0$ e se n è
 dispari sono definite $\forall x \in \mathbb{R}$

es. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

$\forall x \geq 0$

• Potenze a esponente reale

es. $f(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$?

$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\forall x > 0$

$\alpha = p, d_1 d_2 d_3 \dots$ infinito

$p, d_1 \in \mathbb{Q}$

x^{p, d_1}

l'ho definito sopra perché è una potenza a esponente razionale

x^{p, d_1, d_2}

$x^\alpha \doteq \sup \{ x^{p, d_1, \dots, d_n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

proprietà

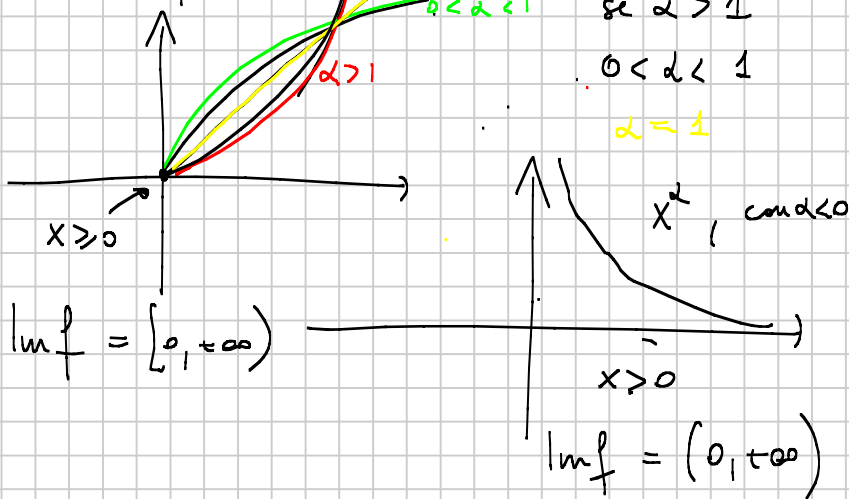
$x^r \cdot x^s = x^{r+s}$

$(x^r)^s = x^{rs}$

Ricordo

$f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

è definita $\forall x > 0$

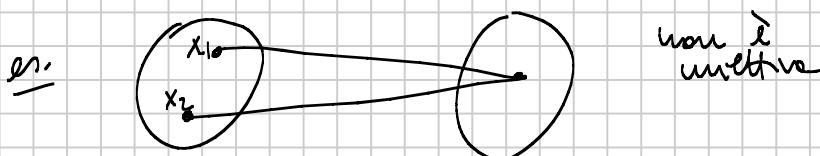


Funzioni iniettive e suriettive

Def. $f: X \rightarrow Y$ è iniettiva se

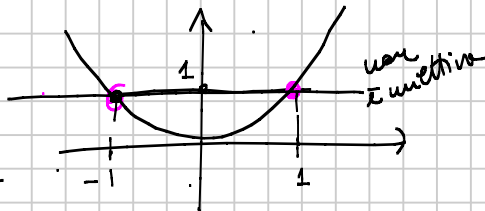
$\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(o equiv. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

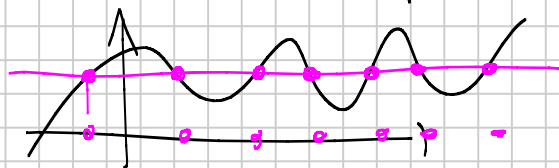


es. $f(x) = x^2$

$f(-1) = f(1) = 1$



es.



es. $f(x) = x^3 + 3$ è iniettiva

Def. $\overset{Hp.}{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow \overset{Ts.}{x_1 = x_2}$

$f(x_1) = x_1^3 + 3 = x_2^3 + 3 = f(x_2)$

$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \overset{Ts.}{\#}$



$f(x) = x^3 + 3$

es. $f(x) = x^2$ è iniettiva?

Def. $\overset{Hp.}{f(x_1) = f(x_2)} \Rightarrow \overset{Ts.}{x_1 = x_2} ?$

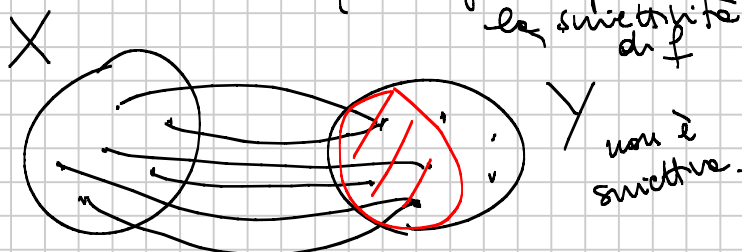
$x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \quad \text{no!}$

Def. $f: X \rightarrow Y$ è suriettiva se

$\text{Im } f = Y$ o equivalentemente

$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

(serve per verificare la suriettività di f)



oss. Basta modificare ("tagliare") Y e

$f: X \rightarrow Y'$

togliere i punti che non sono immagine di nessuno x .

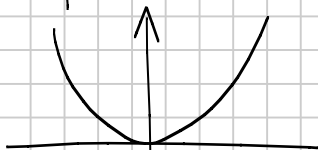
es. $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\text{Im } f = [0, +\infty)$



$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$
 in questo caso f
 è suriettiva.

In la suriettività restringere il codominio
 all' $\text{Im } f$ non cambia niente, il
 grafico è lo stesso.

es. $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$



non è iniettiva
 ma diventa
 iniettiva se

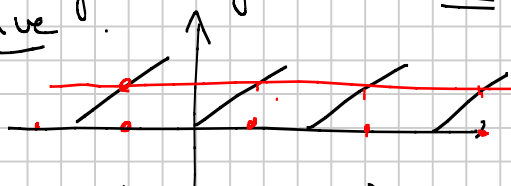
$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

in questo
 caso
 abbiamo un "ramo"
 di parabola



oss l'iniettività e la suriettività dipendono
 dalle scelte del dominio e del codominio

oss. le funzioni periodiche non sono
iniettive



funzione
 crescente
 periodica
 di periodo 1

es si prende $x \in [0, 1)$

$f(x): [0, 1) \rightarrow [0, 1)$

è iniettiva e suriettiva



Def. f iniettiva + f suriettiva $\Rightarrow$ BIETTIVA

$f: X \rightarrow Y$

(c'è una corrispondenza
 biunivoca tra X e Y)

Riassunto

$f: X \rightarrow Y$ $y = f(x)$

• $\forall y \in Y \Rightarrow$ almeno un $x \in X: y = f(x)$

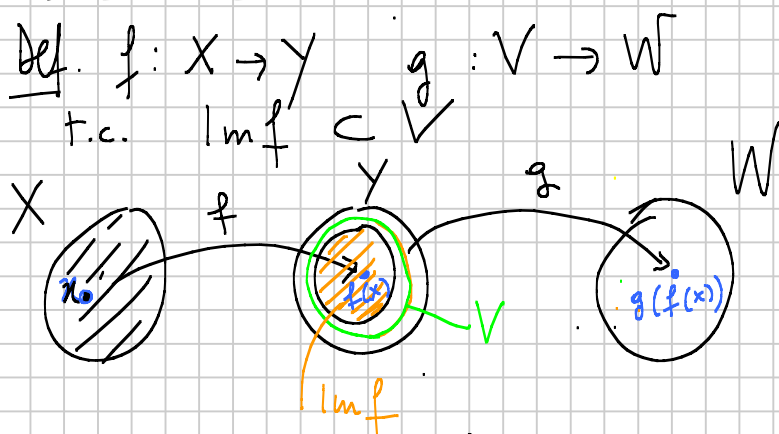
f è SURIETTIVA

• $\forall y \in Y$ c'è al più un $x \in X: y = f(x)$

f è INIETTIVA

• $\forall y \in Y \exists! x \in X : y = f(x)$
 f è BIETTIVA

FUNZIONI COMPOSITE



$$x \mapsto f(x) \in \text{Im } f \subset V$$

$$\hookrightarrow g(f(x))$$

funzione composta $g \circ f$ ("g composta f")
 è la funzione

$$g \circ f: X \rightarrow W \quad \text{t.c.}$$

$$x \mapsto g(f(x))$$

es. $f(x) = x^2 + 1$ $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$
 $g(x) = \sqrt{x}$ $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

$$g \circ f$$

$$g \circ f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f \circ g(x) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

se $\text{Im } g \subset \text{dom } f$

per fare la
composizione
 $g \circ f$ deve essere
 $\text{Im } f \subset \text{dom } g = V$

quindi $f \circ g \neq g \circ f$

es.

$$f(x) = -x^2$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

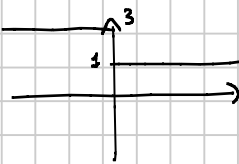
$$g \circ f(x) \stackrel{?}{=} \sqrt{-x^2} \quad \text{no!}$$

$$\leq 0$$

$$f \circ g(x) = -(\sqrt{x})^2 = -x$$

es. Per cose

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ -x & x \leq 1 \end{cases}$$

fare $f \circ g$ e $g \circ f$

$$g \circ f(x) \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow f(x) = 1 & g(1) = -1 \\ x < 0 \rightarrow f(x) = 3 & g(3) = 9 \end{cases}$$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 9 & x < 0 \end{cases}$$

$$f \circ g(x) = ? \dots$$

es. $g: X \rightarrow Y$ $f: Y \rightarrow Z$ $f \circ g: X \rightarrow Z$

2) Se $f \circ g$ è iniettiva $\Rightarrow$ g è iniettiva

suff.

abbiamo dim. che se

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

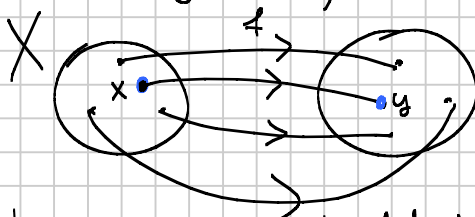
FUNZIONE INVERSA

$$f: X \rightarrow Y \text{ iniettiva}$$

$$f: X \rightarrow \text{Im } f \text{ è biettiva (perché è iniettiva per costruzione)}$$

$$\forall y \in \text{Im } f \exists ! x \in X \text{ t.c. } f(x) = y$$

è suriettiva
perché ha immagine
il codominio



$$\text{Im } f$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

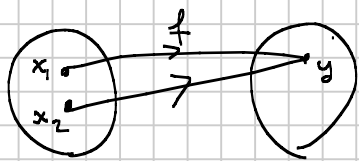
In questo caso è definita una nuova funzione

$$f^{-1}: \text{Im } f \rightarrow X$$

$$f^{-1} \text{ funzione inversa di } f$$

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

oss. Se f non è iniettiva, f^{-1} non è una funzione



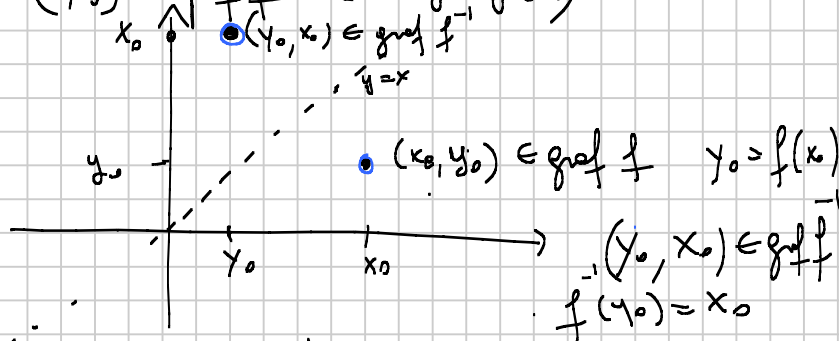
$f^{-1}(y)$ non è una funzione

$$f: \text{dom } f \rightarrow \text{Im } f$$

$$f^{-1}: \underbrace{\text{Im } f}_{\text{dom } f^{-1}} \rightarrow \underbrace{\text{dom } f}_{\text{Im } f^{-1}}$$

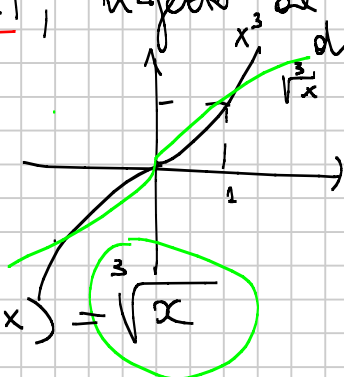
Grafico di f^{-1} da grafico di f

$$(x, y) \in \text{graf } f \Leftrightarrow y = f(x)$$



il grafico di f^{-1} è simmetrico rispetto alla retta $y=x$, rispetto al grafico di f

es. $f(x) = x^3$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
è biettiva

quindi $\exists f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

es. $f(x) = x^2$



$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$
non è iniettiva

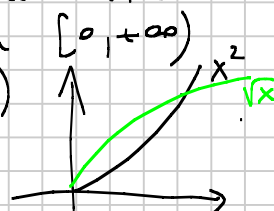
$\nexists f^{-1}$ ma

le considero ristretta

$f(x): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

è BIETTIVA

In queste funzione in questo dominio



$$\exists f^{-1}(x) \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x$$

oss. A cui potremmo pensare

$$f(x): (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\exists f^{-1}(x) \text{ non si chiama } \sqrt{x}$$

$$\text{ma si chiama } -\sqrt{-x}$$



$$\text{graf } f^{-1} = \text{graf } (-\sqrt{-x})$$

oss. $f \circ f^{-1} = Id$ funzione identita

$$Id: x \rightarrow x$$

$$f \circ f^{-1} = Id \quad \text{funzione identita}$$

$$f(x) = x^2 \quad (x > 0)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$f \circ f^{-1} = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$f^{-1} \circ f = \sqrt{x^2} = x \quad \text{per } x > 0$$

Teorema $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

strett. monotona in $A \subseteq X$

$\Rightarrow f$ è invertibile ($\exists f^{-1}$) e

f^{-1} è strett. monotona.

Dim dim. di x e f è strett. crescente
allora $\exists f^{-1}$

$$\text{H.p. } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$$

f è iniettiva

$$f: X \rightarrow \text{Im } f \text{ è biettiva} \Rightarrow \exists f^{-1}$$

e si può dim. (non si fa) che f^{-1} è strett. crescente.

FUNZIONI ESPONENZIALI

$$f(x) = a^x \quad a > 0$$
$$x \rightarrow a^x = y > 0$$

$$x^x, x > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{es}} \quad f(x) = 3^x$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f(x) = a^x$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{Im } f = (0, +\infty)$$

$$a^x > 0$$

