

Lezione del 15 Dicembre

- Es 3 del fle es. on integrali

$$\int_{-4}^4 \rightarrow \int_{-1}^1$$

- Fine corso ~ 19/20 gennaio.

Integrali generalizzati (o impropri).

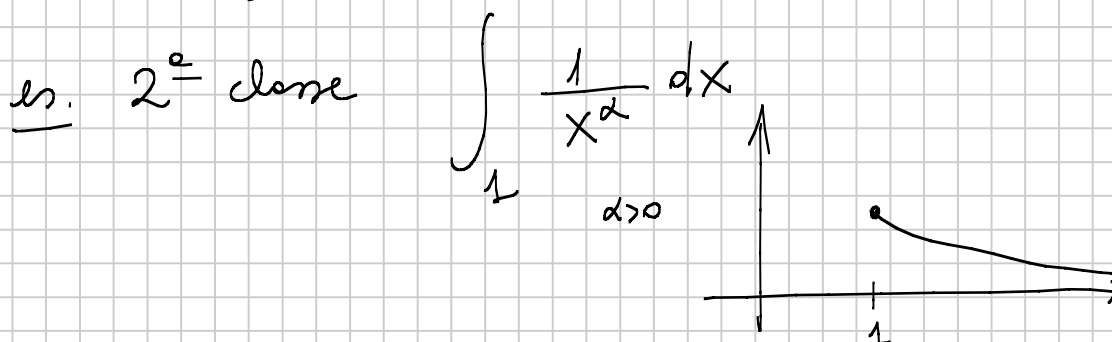
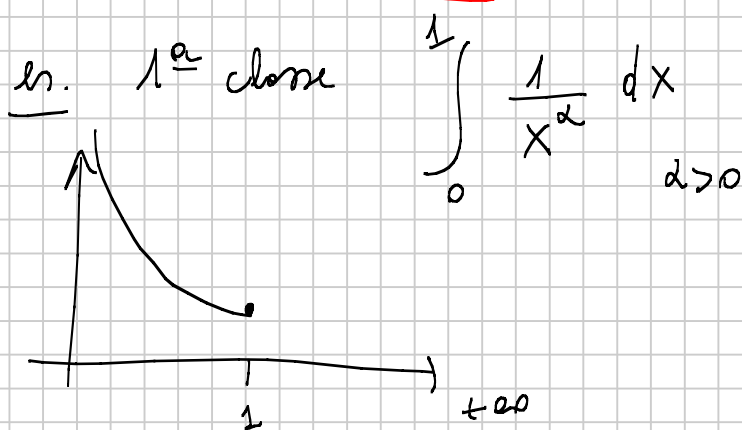
Integrali definiti : f limitata in intervallo $[a, b]$ limitato.

1^a classe di integrali generalizzati

f illimitata in intervallo limitato

2^a classe di integrali generalizzati

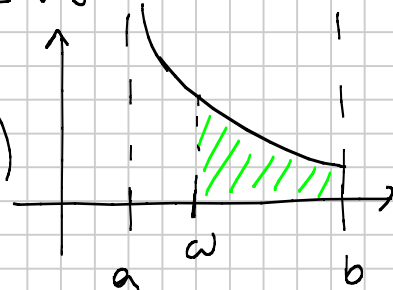
f limitata in intervallo illimitato



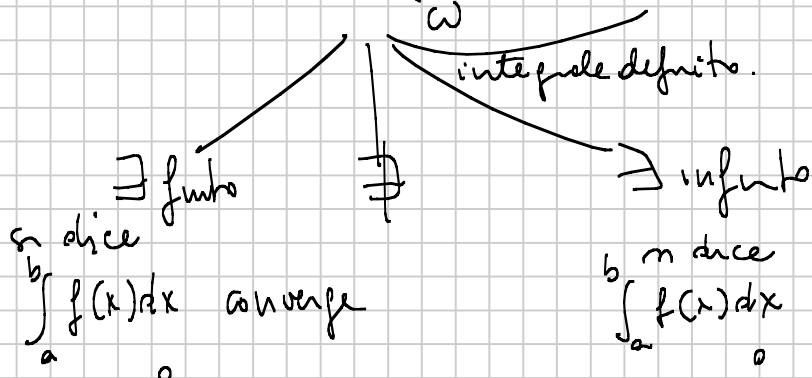
1^a classe f illimitata in $[a, b]$ limitato

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

(oppure $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$)



$$\int_a^b f(x) dx \doteq \lim_{\omega \rightarrow a^+} \int_{\omega}^b f(x) dx$$



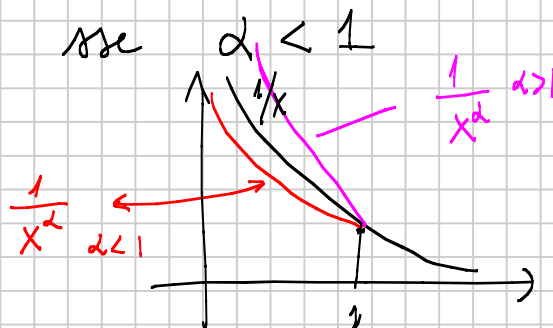
" f è integrabile" in $[a, b]$

" f non è integrabile" in $[a, b]$.

Una classe di funzioni

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \alpha > 0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge se } \alpha < 1$$



Oss. Non sempre si riesce a usare la def. di integrale generalizzato. far vedere se conv. o no.

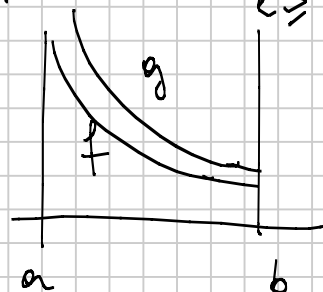
Criteri di integrabilità per $f \geq 0$

1) Criterio del confronto $f, g : (a, b]$ continue $e \geq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f = \lim_{x \rightarrow a^+} g = +\infty$$

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

$$\int_a^b g(x) dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx$$



$$\int_a^b f(x) dx \text{ div.} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ div.}$$

Criterio del confronto asintotico

$f, g : (a, b]$ continue $f, g \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow a^+$

$$f \sim g \quad x \rightarrow a^+$$

f integrabile in $(a, b]$ $\Leftrightarrow g$ è integrabile in $(a, b]$.

es. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x \sim x$$

$$\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\pi/2$$

$$\pi/2$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx$$

conv.

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{x}$$

diverge.

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx \text{ diverge}$$

es $\int_0^1 \frac{1}{(e^x - 1)^2} dx$

$$\frac{1}{(e^x - 1)^2} \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow 0$$

$$e^x \sim 1 + x \quad x \rightarrow 0$$

$$(e^x - 1)^2 \sim x^2 \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{(e^x - 1)^2} \sim \frac{1}{x^2}$$

$$1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$\alpha > 1$
diverge

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{(e^x - 1)^2} dx \text{ diverge.}$$

es. $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx$

$$e^{\sqrt{x}} \sim 1 + \sqrt{x} \quad x \rightarrow 0$$

$$e^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ converge} \quad \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1} dx \text{ converge.}$$

Un'altra classe di "funzioni compare"

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta} dx \quad \begin{array}{l} \text{converge} \\ \text{in } (0, \frac{1}{2}] \\ \text{se} \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha < 1 \\ \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \\ \forall \beta > 1 \end{array}$$

$\log x < 0 \quad x \in (0, 1/2)$

es. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x} \log x} dx \quad \begin{array}{l} \text{converge} \\ (\alpha = 1/2, \beta = 1) \end{array}$

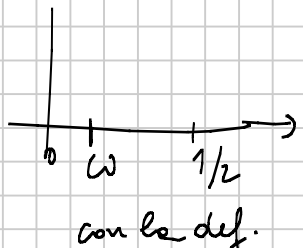
$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx \quad \begin{array}{l} (\alpha = 1, \beta = 1) \\ \text{diverge} \end{array}$

$\int_0^{1/2} \frac{1}{x (\log x)^2} dx \quad \begin{array}{l} (\alpha = 1, \beta = 2) \\ \text{converge.} \end{array}$

Facciamo il calcolo di

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \int_\omega^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \int_{\log \omega}^{\log \frac{1}{2}} \frac{1}{t} dt =$$



$\log x = t$
 $\frac{1}{x} dx = dt$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left(\frac{\log |t|}{\log \omega} \right) =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left(\log \left| \log \frac{1}{2} \right| - \log \left| \log \omega \right| \right) =$$

diverge.

oss. Se $f(x)$ non è ≥ 0 (non è sempre dello stesso segno) si guarda se

$\int_a^b |f(x)| dx$ converge e se

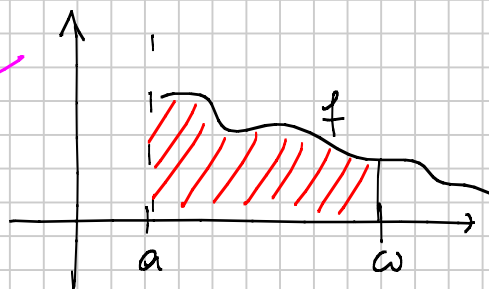
$\int_a^b |f(x)| dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ converge.

2^a classe di integrali generalizzati

$f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \doteq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_a^{\omega} f(x) dx$$

integrali definiti



analogia con le serie



le somme inferiori e superiori sono

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

dove a_k sono le aree dei rettangoli

Def. • Se il limite esiste finito $+\infty$ allora f è integrabile in $[a, +\infty)$ (oppure $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ "converge")

• Se il limite è $\pm\infty$ si dice che f non è integrabile in $[a, +\infty)$ (oppure $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ "diverge").

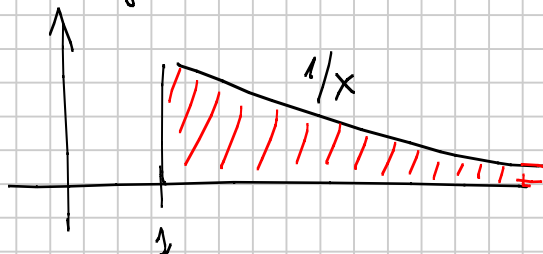
• Se il limite non esiste si dice che $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ non esiste.

Es. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx =$

$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x} dx$

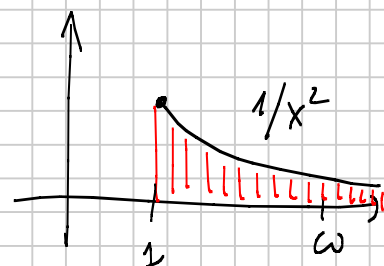
$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\log |x| \Big|_1^{\omega} \right) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \log \omega - 0 = +\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, la funzione $\frac{1}{x}$ non è integrabile in $[1, +\infty)$.



Es. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx =$

$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^2} dx =$

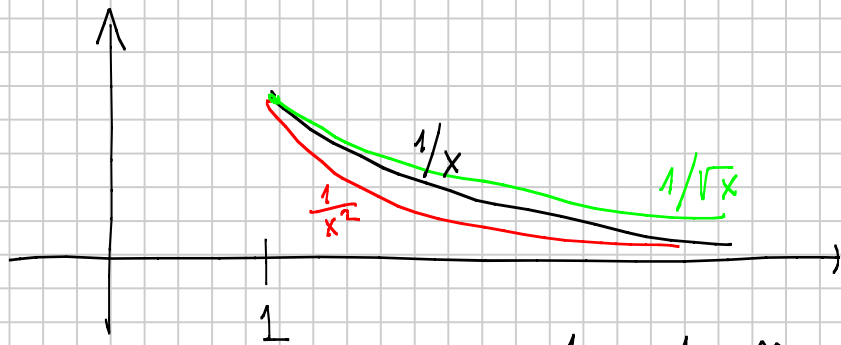


$$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^\omega = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\omega} + 1 \right) = 1$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 \quad \text{converge.}$$

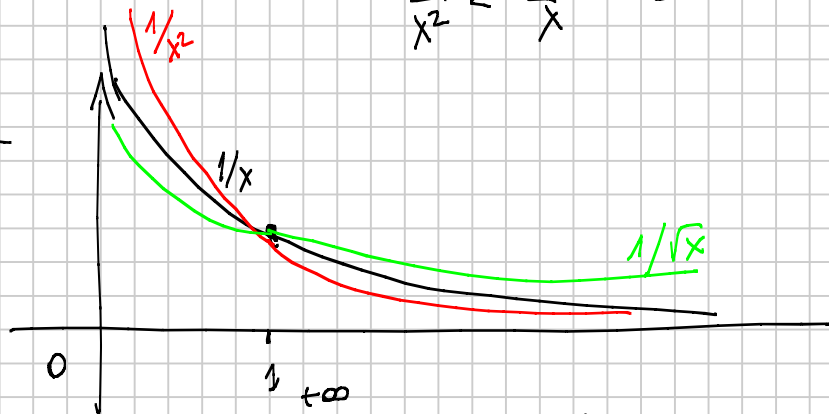
In generale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{converge se } \alpha > 1$$



$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} \quad \text{per } x > 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{conv.}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \quad \text{div.}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{div.}$$

$$\text{ma } \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{diverge.}$$

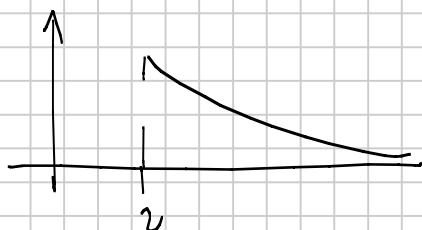
$$\text{ma } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{conv.}$$

$$\text{e anche } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{div.}$$

Altra classe di funzioni compare

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha} (\log x)^{\beta}} dx \text{ converge sse } \begin{matrix} \alpha > 1 & \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1 & \forall \beta > 1 \end{matrix}$$

$$\sum \frac{1}{k^{\alpha}} \frac{1}{(\log k)^{\beta}}$$



Criteri di integrabilità all'infinito.

1) $f : [a, +\infty)$ continua

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

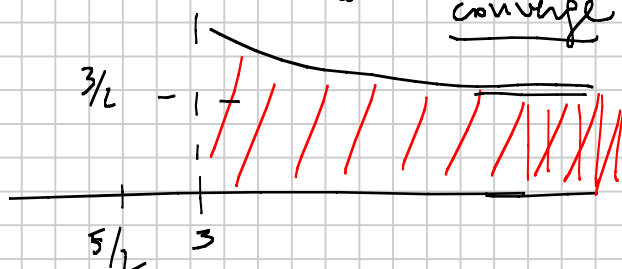
(condizione necessaria di convergenza)



oss. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ non converge

es. $\int_3^{+\infty} \left(\frac{3x+1}{2x-5} \right) dx$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$$



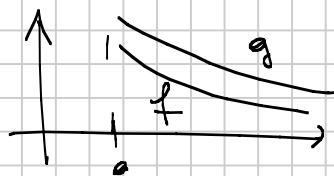
$\Rightarrow f(x)$ non è integrabile

Criteri di integrabilità per $f \geq 0$

Criterio confronto $f, g : [a, +\infty)$ continue.

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ in } [a, +\infty)$$

• Se g è integrabile $\Rightarrow f$ è



in $[a, +\infty)$

integrabile
in $[a, +\infty)$

- se f non è integrabile in $[a, +\infty)$ $\Rightarrow$ g non è integrabile in $[a, +\infty)$.

Criterio del confronto asintotico

$f, g : [a, +\infty)$ continue, $f \geq 0, g \geq 0$.

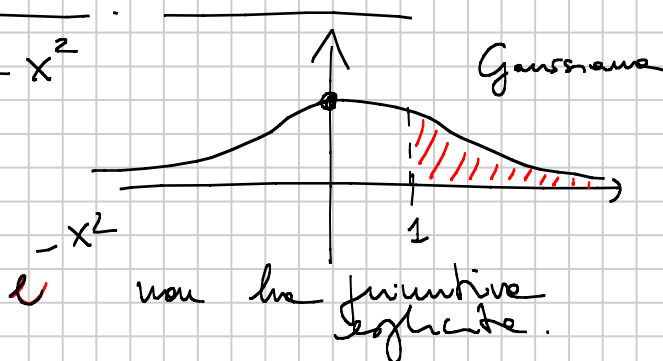
se $f \sim g \quad x \rightarrow +\infty$

f è integrabile in $[a, +\infty)$ $(\Rightarrow)$ g è integrabile in $[a, +\infty)$.

Es.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$



$$x \geq 1$$

$$\underbrace{e^{-x^2}}_f \leq \underbrace{e^{-x^2} \cdot x}_g$$

se dim. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x dx$ converge $\Rightarrow$ confronto $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} e^{-x^2} \cdot x dx =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{-\omega^2} e^t \left(-\frac{1}{2}\right) dt =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) e^t \right]_{-1}^{-\omega^2} =$$

$$\begin{aligned} -x^2 &= t \\ -2x dx &= dt \\ x dx &= -\frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$= \lim_{w \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \left(e^{-w^2} - e^{-1} \right) \right] = \frac{1}{2e}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ converge!}$$

per il
funzione del
confronto!

