

Lezione del 17 Novembre

Derivate successive di $f(x)$

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I

$$\exists f'(x) \quad \forall x \in I$$

$$f''(x) := (f'(x))'$$

derivata
seconda di f
(o anche) in I

se f'' è derivabile in I

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

$$f \in C^1(I) \Leftrightarrow f \text{ è derivabile in } I \text{ e } f' \text{ è continua}$$

$$f \in C^2(I) \Leftrightarrow f \text{ è derivabile 2 volte in } I \text{ e } f'' \text{ è continua.}$$

$$f \in C^k(I) \Leftrightarrow \dots \text{ in } I \text{ e } f^{(k)} \text{ è continua}$$

k -volute

es. $f(x) = e^x$ deriv. in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x \quad \text{" "}$$

$$f''(x) = e^x \quad \dots \quad f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$f \in C^k(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{si dice } C^\infty(\mathbb{R}))$$

$$f(x) = \sin x \quad \text{deriv. in } \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \cos x \quad \text{" "}$$

$$f''(x) = -\sin x \quad \text{" } \Rightarrow f(x) \in C^\infty$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad \text{" "}$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \text{"}$$

$$f(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

f è continua in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f' = \lim_{x \rightarrow 0^+} f' = 0$$

$$f'(0) = 0$$

f è derivabile in $\mathbb{R}$

e f' è continua
 $f \in C^1(\mathbb{R})$.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x > 0 \\ -6x & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'' \in C^2(\mathbb{R})$$

$$f'''(x) = \begin{cases} 6 & x > 0 \\ -6 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'''(x) = -6 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'''(x) = 6$$

$f'''(x)$ non esiste in $x = 0$.

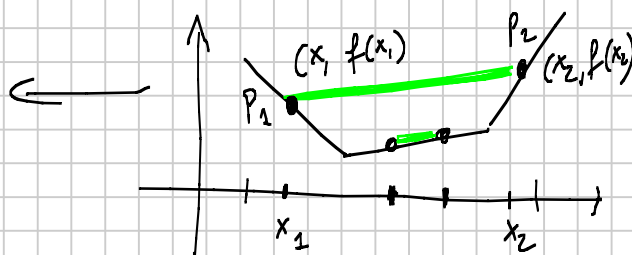
FUNZIONI CONVESSE

Def. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo

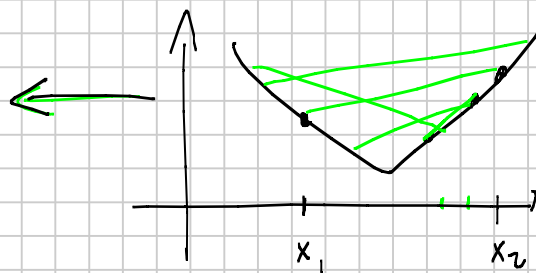
f convessa in I se $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$
il segmento congiungente $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto il grafico di $f(x)$. Se gli unici punti in comune con il grafico di f sono gli

estremi dico che $f(x)$ è strettamente convessa.

f convessa
ma non strettamente
convessa.

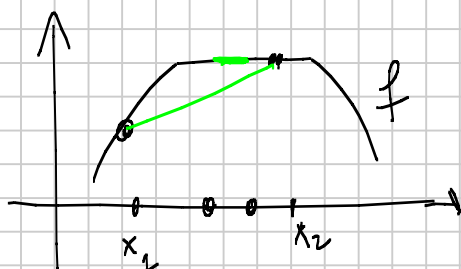


f strettamente
convessa.



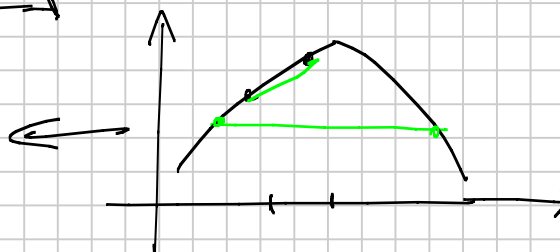
Def.

Analog. f è concava o f è convessa
("sopra il grafico" e "sotto il grafico")



f concava
ma non strettamente
concava

f è
strettamente
concava.



Come si scrive analiticamente che una
funzione è convessa.

f è convessa $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$
in I

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

f è strettamente convessa

$$\Leftrightarrow f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

per $x \neq x_1, x_2$

altra
formula per
 $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

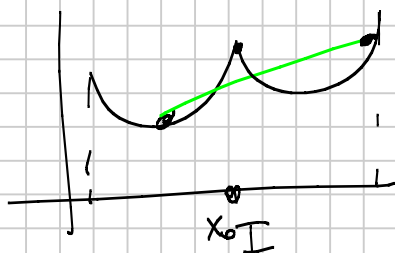
Teo. f derivabile in I
 f è convessa in $I \Leftrightarrow f'(x)$ è crescente.

Teo. f derivabile due volte in I

f convessa in $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ in I
 f concava in $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ in I
 $f''(x) > 0$ in $I \Rightarrow f$ è strett. convessa in I
 $f''(x) < 0$ in $I \Rightarrow f$ è strett. concava in I

Dim. no

oss. f deve essere derivabile due volte in I



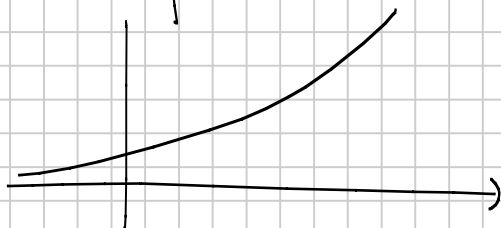
f è derivabile due volte
in I tranne che
in x_0

$f''(x) > 0$ dove esiste
ma f non è convessa
in I

es. • $f(x) = e^x$ in $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x > 0$ in $\mathbb{R} \Rightarrow f$ strett. crescente in $\mathbb{R}$

$f''(x) = e^x > 0$ in $\mathbb{R} \Rightarrow f$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$



• $f(x) = \log x$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

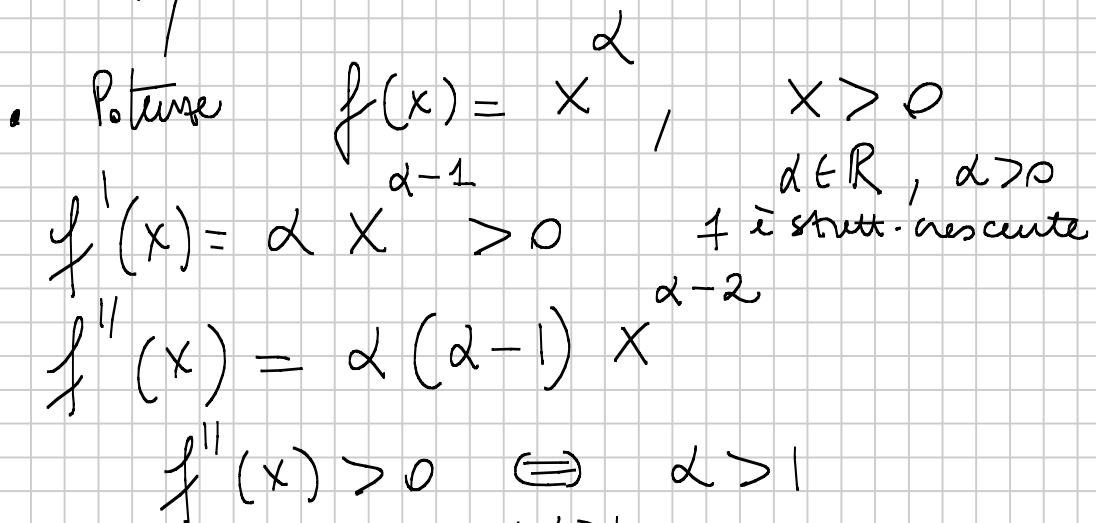
$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$x > 0$

$x > 0$

f è
strett.
crescente
in $x > 0$

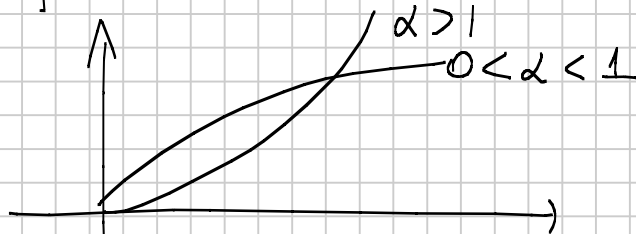
f è strett. concava in $x > 0$



$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} > 0$$

$$f^{(1)}(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$$



$f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$ $\overline{e}$ strictly concave ($\Rightarrow \alpha < 1$)
 " $\quad$ " " $\quad$ " $\quad$ convex ($\Rightarrow 0 < \alpha < 1$)

oss. f $\bar{x}$ strett. convessa $\nRightarrow f''(x) > 0$

5. $f(x) = x^4$ in $\mathbb{R}$

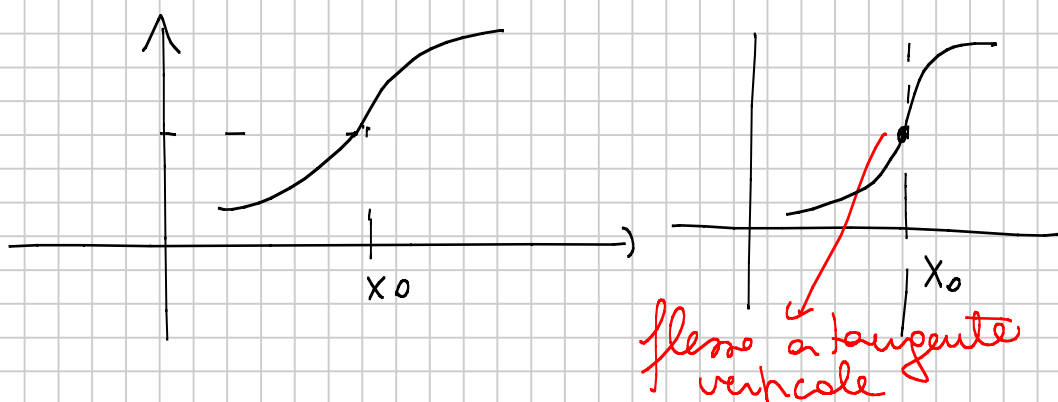
$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2 \geq 0 \quad (\text{nullstelle bei } x=0)$$



Def. $x_0 \in I$ è un p.to di flesso per f se esiste un intorno di x_0 in cui f cambia concavità e in x_0 deve essere $f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$.

se $f'(x_0) = +\infty$ ($-\infty$) riduce x_0 flessa
a tangente verticale



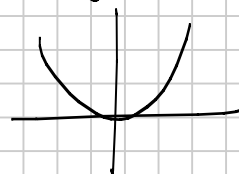
Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ f.h. di flesso
 f è derivabile due volte in x_0 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

oss. se $f''(x_0) = 0 \nRightarrow x_0$ j.h. di flesso.

$$f(x) = x^4$$

$$x=0 \quad f''(0) = 0$$

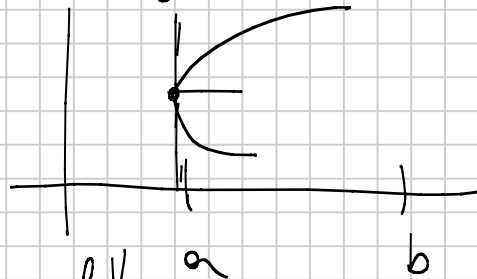
$\Rightarrow$ ma $x=0$ non è punto di flesso.



STUDIO DI GRAFICI

- dominio di definizione di f , D
- eventuali simmetrie (pari, dispari, periodica)
- In alcuni casi (specificati nell'esercizio) o studiare il segno di f .
- Punti di accumulazione di D e limiti in tali punti ($+\infty$, $-\infty$ se D non è limitato) e eventuali asintoti obliqui
- Regolarità di f : vedere dove f è continua, dove è derivabile, studiare le discontinuità di f
- Calcolo di f' e studiare i pti di non derivabilità (f.h. angolosi, cuspidi, f. verticali)
- Segno di f' , $f' = 0$, negli intervalli nei quali si può usare il test di monotonia.

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'$
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'$ "attacchi"
 x_0 p.to di accumulazione
 $f \in D$



- dove esiste calcolare $f''(x)$ e studiare il segno (se ∞ può)
- a bozza del grafico, tenendo conto dei valori di f nei p.t. di max e min locale e negli estremi del dominio D .

Es. $f(x) = 3 - \frac{1}{|\sin x|}$

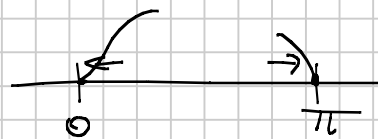


- Dominio = $\{x: \sin x \neq 0\} = \{x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $f(x)$ è periodica di periodo π . la studiamo in $(0, \pi)$ dove $\sin x > 0$
 $\Rightarrow |\sin x| = \sin x$.

$f(x) = 3 - \frac{1}{\sin x}$ in $(0, \pi)$.

- segno $f(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - \frac{1}{\sin x} = 0$



$\lim_{x \rightarrow \pi^-} 3 - \frac{1}{\sin x} = 0$

perché $\exists$ finito il limite la funzione f continua in $x=0$ e in $x=\pi$

Severando $f(0) = 0$ e $f(\pi) = 0$.

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & x \in (0, \pi) \\ 0 & x = 0, x = \pi \end{cases} \quad \tilde{f} \text{ est continue sur } [0, \pi]$$

• $f'(x)$

$$f(x) = 3^{-\frac{1}{\sin x}} \quad \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = (\sin x^{-1})' = -(\sin x)^{-2} \cdot \cos x$$

$$f'(x) = 3^{-\frac{1}{\sin x}} \cdot \log 3 \cdot (-1) \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = 3^{-\frac{1}{\sin x}} \log 3 \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

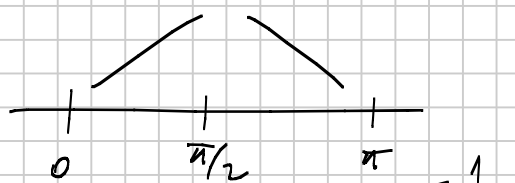
Toujours sur $(0, \pi) \Rightarrow f$ est dérivable sur $(0, \pi)$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$< 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \text{J. h stationnaire}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ J. h de maximum locale



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = 3^{-\frac{1}{\sin x}}$$

Studions comme on "attache" la fonction sur $x=0$ et $x=\pi$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 3^{-\frac{1}{\sin x}} \log 3 \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$(\log 3 \cos x) \frac{3^{-\frac{1}{\sin x}}}{\sin^2 x} \quad \frac{0}{0}$$

$$\sin x = y \quad x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow 0^+$$

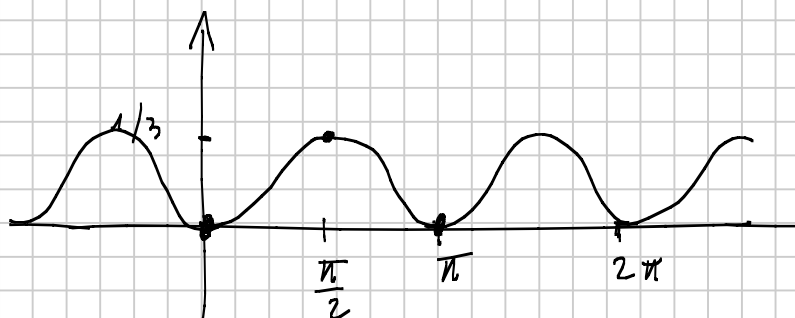
$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{3^{-\frac{1}{y}}}{y^2} =$$

$$\frac{1}{y} = z$$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} 3^{-z} \cdot z^2 = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^2}{3^z} = 0$$

$y \rightarrow 0^+ \Rightarrow z \rightarrow +\infty$

• no f''



f non è def. in $x=0$ e $x=\pi$ ma è continua in $x=0$ e $x=\pi$ e la funzione $(\tilde{f})$ è derivabile in $x=0$ e $x=\pi$.