

Lezione del 18 Dicembre

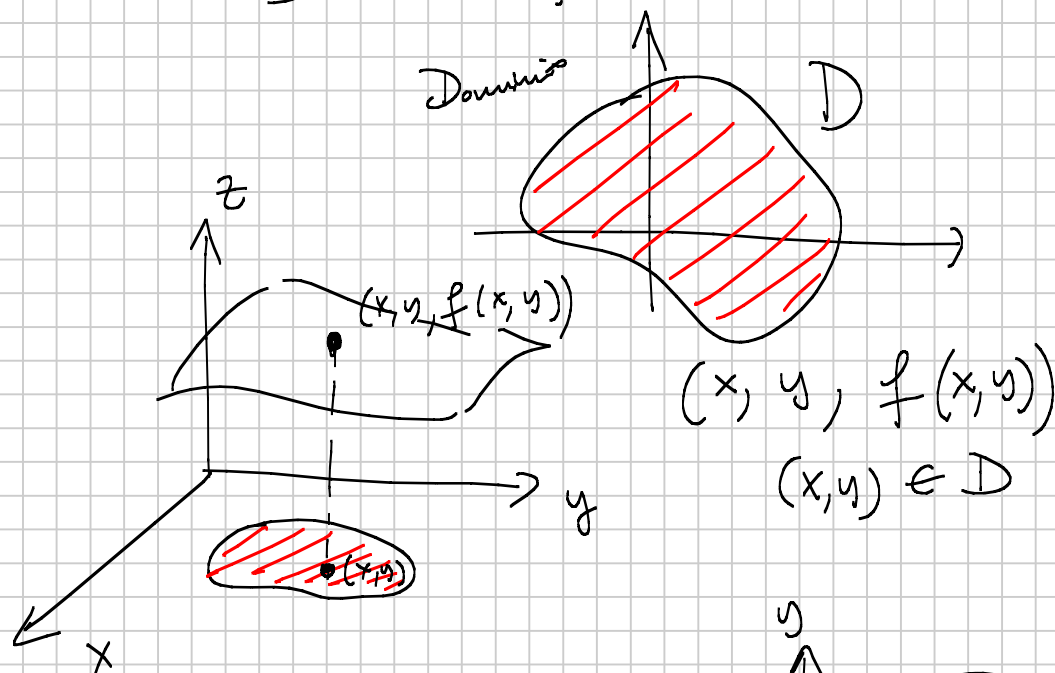
funzioni in 2 o 3 variabili

2 o 3

2 Variabili

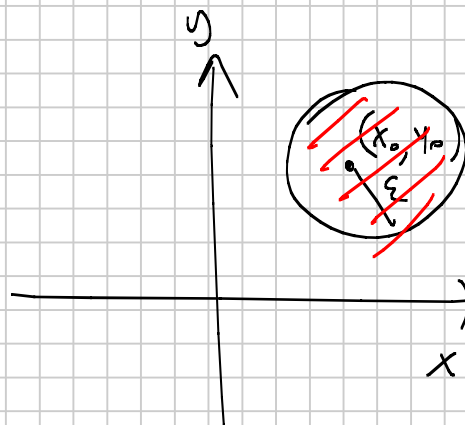
$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$$

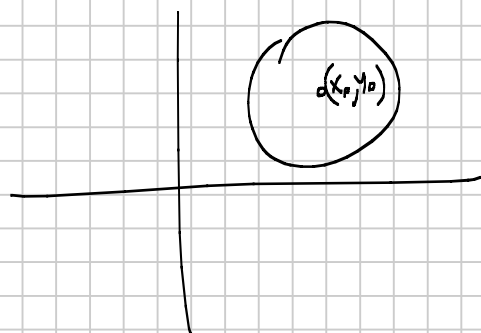


$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = l$$

$$B_\varepsilon((x_0, y_0))$$



Def f è continua se $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$



Cenni di topologia in $\mathbb{R}^2$

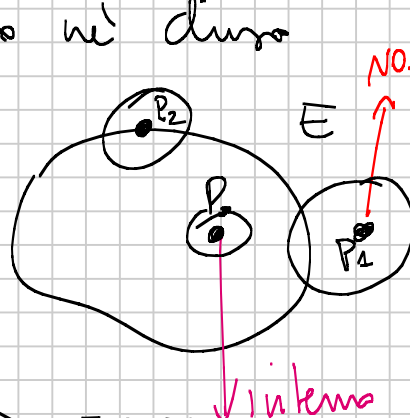
in $\mathbb{R}$ $(a, b) = \{ a < x < b \}$ aperto

$[a, b] = \{ a \leq x \leq b \}$ chiuso

$(a, b]$ né aperto né chiuso

Def. $E \subseteq \mathbb{R}^2$

$P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è INTERNO ad E
se esiste un intorno
di (x_0, y_0) contenuto in E



analogamente $P_0 = (x_0, y_0)$ è ESTERNO
se è interno al CE .

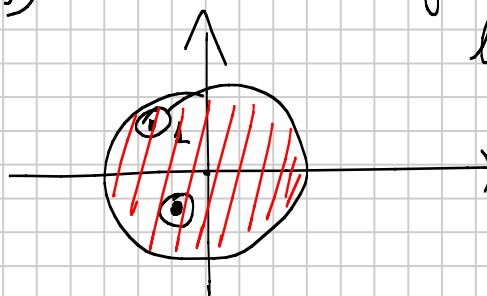
P_1 è esterno

P_2 non è né esterno, né interno.

Def. $E \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto se ogni suo
punto è interno; è chiuso se
il suo complementare è aperto.

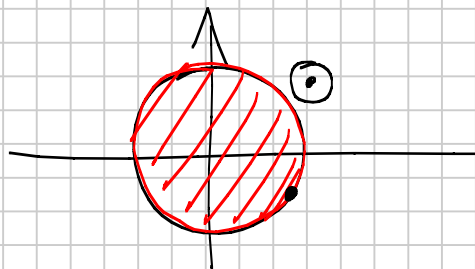
Es.

$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$
è APERTO
la circonf. è esclusa



$E^* = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$

è CHIUSO
(non è aperto)

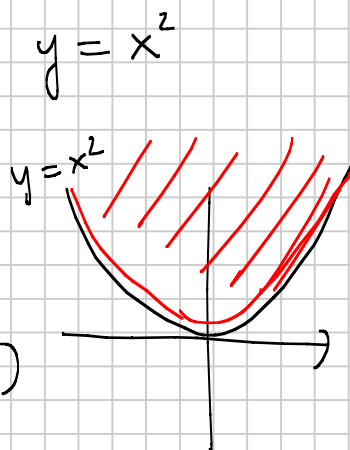
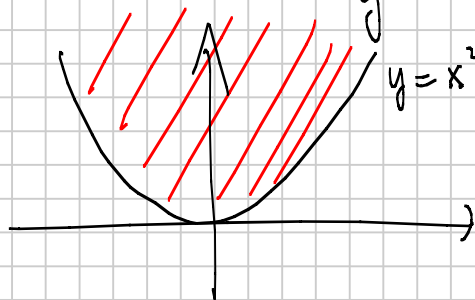


In generale per riconoscere quando un insieme è aperto o chiuso se è definito da una funzione $f(x, y)$ continua si fa così:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} f(x, y) > 0 \\ < 0 \\ \neq 0 \end{array} \right\} \quad \text{APERTI}$$

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} f(x, y) \geq 0 \\ \leq 0 \\ = 0 \end{array} \right\} \quad \text{CHIUSI}$$

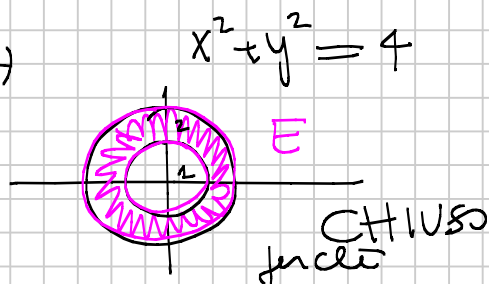
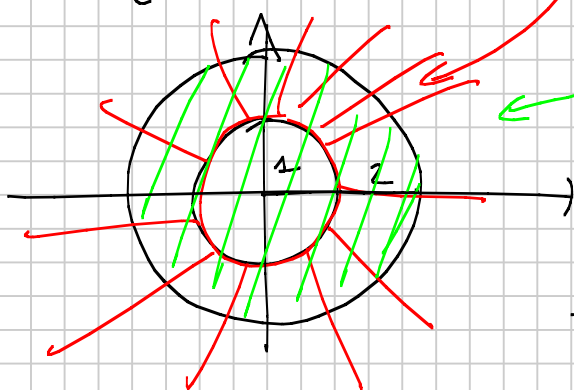
es. $E = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} y > x^2 \\ y - x^2 > 0 \end{array} \right\} \quad \bar{E} \text{ aperto.}$



$\bar{E} = \left\{ (x, y) : y \geq x^2 \right\}$
 $\bar{E}$ CHIUSO

oss. L' unione di due o più chiusi è CHIUSO
 " " " " aperto è APERTO

Es. $\left\{ (x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$



intersezione
di chiusi

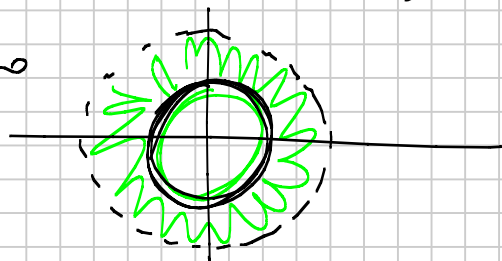
$$E = \{ (x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4 \}$$

(corona circolare esclusi i "bordi") è aperto

$$E = \{ (x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 < 4 \}$$

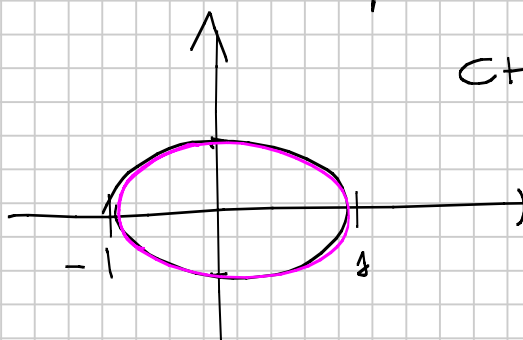
né aperto, né chiuso

$$[a, b)$$

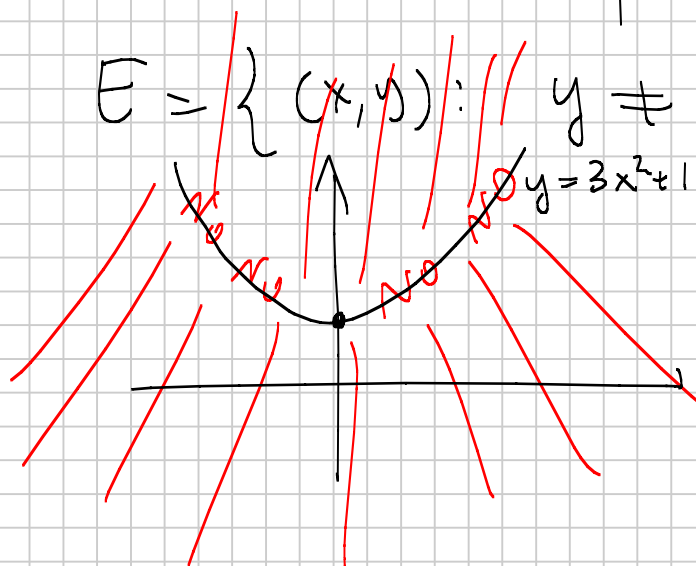


$$E = \{ (x, y) : x^2 + 2y^2 = 1 \}$$

CHIUSO



$$E = \{ (x, y) : y \neq 3x^2 + 1 \}$$



$$y = 3x^2 + 1$$

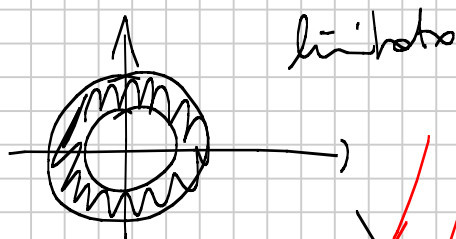
APERTO

Def. $E \subseteq \mathbb{R}^2$ è limitato se
esiste una palla che lo contiene.
(un intorno)

es.

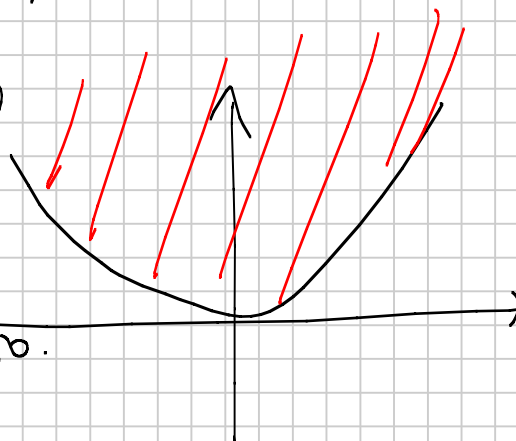


E è limitato.



$$\{(x, y) : y > x^2\}$$

non è limitato.



Teorema di Weierstrass

$f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua in E ,
dove E chiuso e limitato.

Allora f ha massimo e minimo
in E .

DERIVATE PARZIALI

f in una variabile $f(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

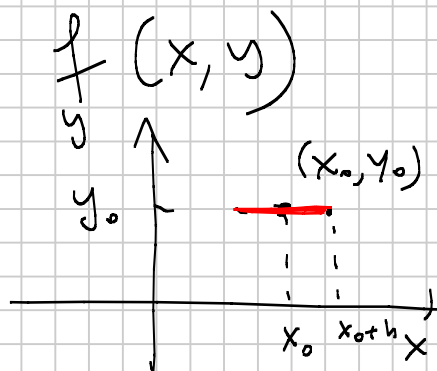
$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

(x_0, y_0)

Fisso y_0 e faccio
varare solo x

(x, y_0)

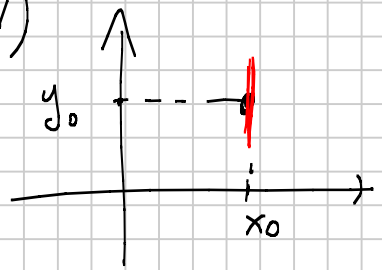
$f(x, y_0)$ è una funzione in
una variabile



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

derivata parziale
di f rispetto a x
in (x_0, y_0)

Analogamente $f(x_0, y)$
 è una funzione di una
 variabile (y)



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

f derivata parziale di
rispetto a y
 in (x_0, y_0)

Come si calcolano

$$f(x, y) = x^5 y^2 + 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x^4 \cdot y^2$$

considero
 $y = \text{costante}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^5 \cdot 2y$$

considero
 $x = \text{costante}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3) = 5 \cdot 1^4 \cdot 3^2 = 45$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 3) = 1^5 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

es. $f(x, y) = \sin(x \cdot y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x \cdot y) \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(x \cdot y) \cdot x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi) = \cos(1 \cdot \pi) \cdot \pi = -\pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, \pi) = \cos(1 \cdot \pi) \cdot 1 = -1$$

es. $\log(x - y + 3x^2 e^y) = f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x - y + 3x^2 e^y} \cdot (1 + 6x e^y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x - y + 3x^2 e^y} \cdot (-1 + 3x^2 e^y)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$ *fare*

es. $\arcsin\left(\frac{x}{y}\right) = f(x, y)$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot x \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

es $f(x, y) = \arctg\left(\frac{x+y}{x^2}\right)$

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{\sin y}$$

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$$

$$f(x, y) = \log\left(x - y + \frac{x}{y}\right)$$

Calcolare le derivate parziali in un
fisso punto (x, y) .

Def. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) =: \nabla f(x,y)$
gradiente di
 f in (x,y)

es. per 3 variabili

$$f(x,y,z) = x^2 + 3xz + 2yz^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3z + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 0 + 2z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + 3x + 2y \cdot 2z$$

$$(2x + 3z, 2z^2, 3x + 4yz) = \nabla f(x,y,z)$$

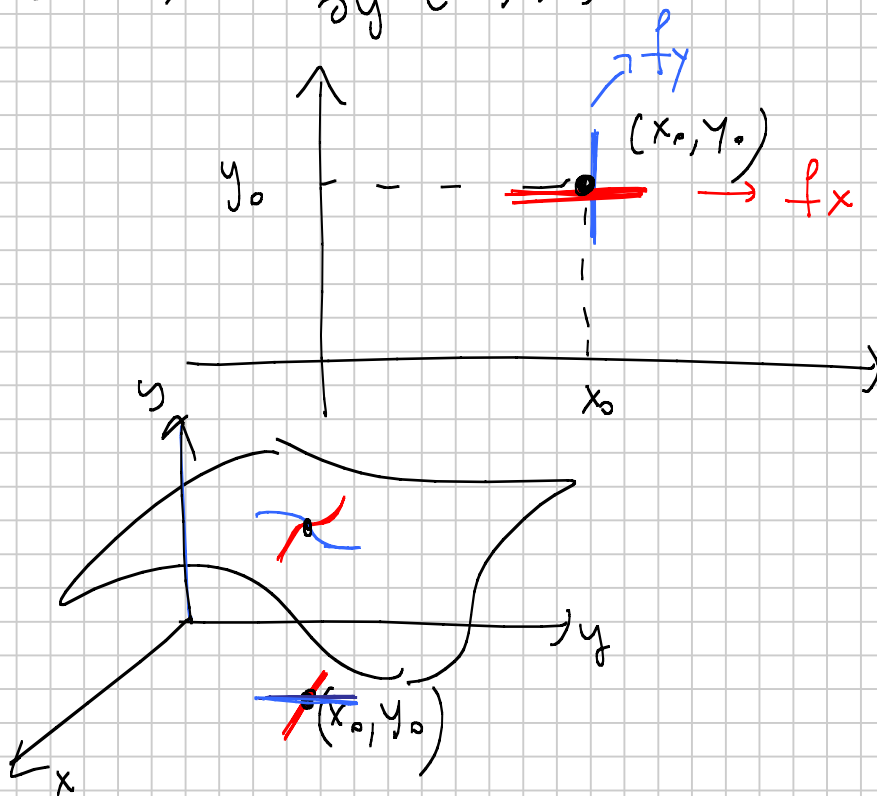
grad f

Def. $f(x,y)$ è DERIVABILE in (x_0, y_0)

se esistono le sue derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

oss.



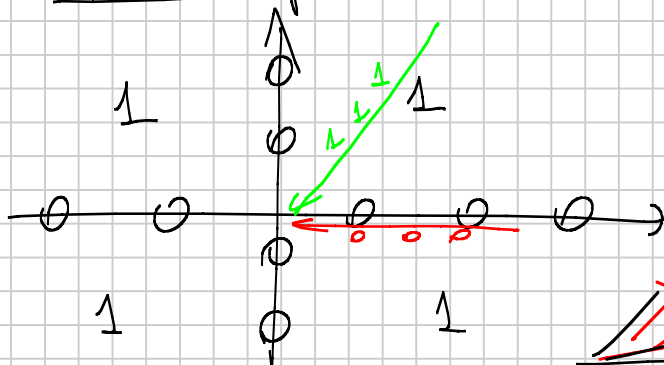
oss. in $\mathbb{R}$ Per f in una
variabile

f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua
in x_0

in $\mathbb{R}^2$ cioè per f di due
variabili questo non è vero.

f è derivabile in $(x_0, y_0) \not\Rightarrow f$ è continua
in (x_0, y_0) .

Controesempio



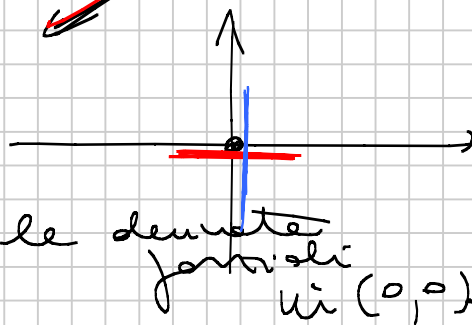
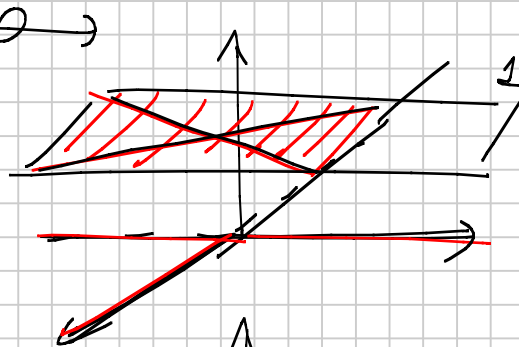
$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

f non è continua
in $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$\Rightarrow$ le derivate
parziali
in $(0, 0)$



Es. $f(x, y) = x^2 + 3xy^2$

$$f_x = 2x + 3y^2$$

$$f_y = 3x \cdot 2y = 6xy$$

$$f_{xx} = (f_x)_x = 2$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = 0 + 6y$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = 6y$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = 6x$$

Derivate parziali successive (di ordine ₂)

$$f_{xx} = (f_x)_x$$

$$f_{xy} = (f_x)_y$$

$$f_{yx} = (f_y)_x$$

$$f_{yy} = (f_y)_y$$

esercitarsi a calcolare le derivate
parziali prime e seconde..

