

Lezione del 18 novembre

la prossima settimana faremo  
lezione SOLO

MARTEDÌ 25 Novembre 10.30-13.

MERCOLEDÌ 26 Novembre 3 ore  
8.45 →

3 ore

Teorema (di De l'Hôpital)

$f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $I \rightarrow (a, b)$   
derivabili in  $(a, b)$   
t.c. •  $\lim_{x \rightarrow a^+} f = \lim_{x \rightarrow a^+} g = 0$   $\leftarrow$   
• esiste  $(\text{oppure } +\infty, -\infty)$   
$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (l \in \mathbb{R}^*)$$

allora  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

oss. Analogo risultato se  $\lim_{x \rightarrow b^-} (\dots)$

Dim. no.

oss. Se una delle 2 ipotesi non vale  $\Rightarrow$   
non si può dire nulla del  $\lim \frac{f}{g}$ .

es.  $f(x) = 2x + \sin x \rightarrow +\infty$   $x \rightarrow +\infty$   
 $g(x) = 2x - \sin x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$

vedo se posso usare l'Hofitel.

$$f'(x) = 2 + \cos x$$

$$g'(x) = 2 - \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x} \neq$$

$$\cancel{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f}{g}} \neq$$

$$\text{infatti } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{2x - \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \frac{\sin x}{x})}{x(2 - \frac{\sin x}{x})} = 1$$

è un esempio di limite per il quale

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f}{g} \text{ ma } \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'}{g'}$$

non valgono le ipotesi del teorema dell'Hofitel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

•  $\frac{f}{g}$  forma indeterminata

•  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'}$

es.  $\frac{f}{g}$  non è forma indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} = +\infty$$

$$\text{se calcolo } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 10x - 3}{24x^2}$$

di nuovo (H)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''}{g''} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18x + 10}{48x}$$

di nuovo (H)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'''}{g'''} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$$

Abbiamo fatto 3 derivazioni perché  
f e g sono infiniti di ordine 3  
Per togliere l'indeterminazione alla  
forma  $\frac{f}{g}$  bisogna derivare tante volte  
quanto è l'ordine di infinito o  
inferiore di f e g.

Così nei quali l'Hôpital non serve

$$\text{es. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^4 + x} - \cos x}{(\sec x)(\tan x)} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{x^3}{x^4 + x} = \frac{\cancel{x^3}^2}{\cancel{x}(x^3 + 1)} = \frac{x^2}{x^3 + 1} \rightarrow 0$$

$$\text{Proviamo a fare } \frac{f'}{g'} = \frac{\frac{\frac{x^3}{x^4 + x}}{e^{\frac{x^3}{x^4 + x}}} \cdot \frac{3x^2 \cdot (x^4 + x) - x^3(4x^3 + 1)}{(x^4 + x)^2} + \sec x}{\cos x \cdot \tan x + \sec x \left( \frac{1}{\cos^2 x} \right)}$$

$\Rightarrow$  è peggiorata la situazione!

Es. fate voi il limite di sopra  
usando i limiti notevoli

Supp.  $\frac{x^3}{x^4+x}$

$\frac{e^y-1}{y} \rightarrow \frac{1}{y \rightarrow 0}$

$$\begin{aligned}
 & e - \cos x \\
 = & \left( e^{\frac{x^3}{x^4+x}} - 1 \right) + 1 - \cos x = \\
 = & \frac{e^{\frac{x^3}{x^4+x}} - 1}{\frac{x^3}{x^4+x}} \cdot \frac{x^3}{x^4+x} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x^2 \\
 \stackrel{N.}{=} & 1 \cdot \frac{x^3}{x^4+x} + \frac{1}{2} x^2 \quad \text{farevi!}
 \end{aligned}$$

oss. Prima di applicare l'Hôpital può essere conveniente fare delle sostituzioni

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} &= \frac{0}{0} \quad \frac{f}{g} \quad -x^{-2} \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'}{g'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{1} \cdot \frac{2}{x^3} \\
 &\text{è peggiorata la situazione.}
 \end{aligned}$$

prima di applicare l'Hôpital facciamo una sostituzione

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t^2} \cdot t \quad \frac{1}{x} = t \\
 &\quad t \rightarrow +\infty \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{t^2}}
 \end{aligned}$$

Hôpital  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{t^2} \cdot 2t} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

oss.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x^7 - 3x^3}{x - x^4} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2(1 + x^5 - 3x)}{x(1 - x^3)} = 0$$

$$N. \quad x^2 + x^7 - 3x^3 = x^2 + o(x^2)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$D. \quad x - x^4 = x + o(x)$$

Con queste notazioni il limite di interesse diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^7 - 3x^3}{x - x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x + o(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

Studio del grafico di

$$f(x) = |\operatorname{arctg}(\log x)|$$

1) Dominio  $D = \{x > 0\}$

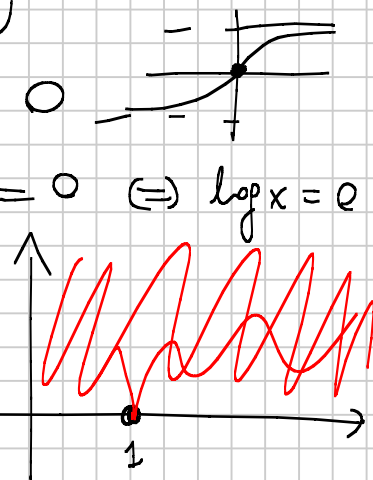
2) segno  $f(x) = | \dots | \geq 0$

$$f(x) = 0$$

$$\operatorname{arctg}(\log x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

3)  $f(x) = |\operatorname{arctg}(\log x)|$



$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\log x) & \text{se } \arctan(\log x) \geq 0 \\ -\arctan(\log x) & \text{se } \arctan(\log x) < 0 \end{cases}$$

$$|g(x)| = \begin{cases} g & g \geq 0 \\ -g & g < 0 \end{cases}$$

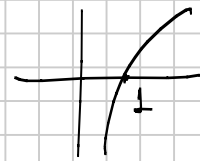
trovare  $x$ :  $\arctan(\log x) \geq 0$

$$\uparrow \uparrow$$

$$\log x \geq 0$$

$$\uparrow \uparrow$$

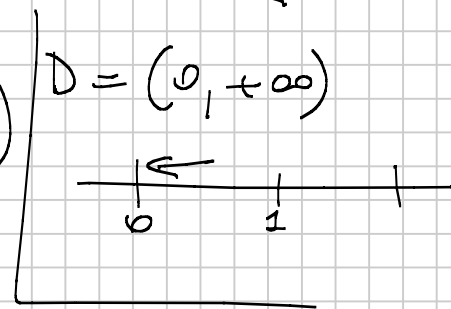
$$x \geq 1$$



$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\log x) & x \geq 1 \\ -\arctan(\log x) & x < 1 \end{cases}$$

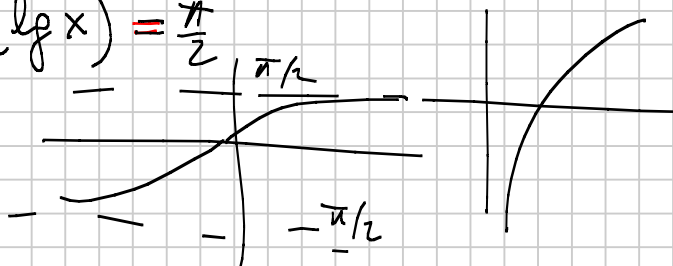
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\arctan(\log x) \quad (x < 1)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (x \geq 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\log x) = \frac{\pi}{2}$$



$y = \frac{\pi}{2}$  asintota orizzontale  
per  $x \rightarrow +\infty$

Perciò  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$

per estendere per continuità la

$f(x)$  anche in  $x=0$ , prendo  $\tilde{f}(0) = \frac{\pi}{2}$

(funzione estesa).

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\log x) & x > 1 \\ -\arctan(\log x) & x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 0$$

$$f \text{ è continua } \forall x > 0$$

vediamo se  $f$  è derivabile  $\forall x > 0$ .

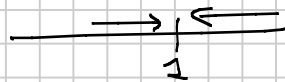
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} & x > 1 \\ -\frac{1}{1+\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

se  $x \neq 1$   $f$  è derivabile

in  $x = 1$  ?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f' = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f' = 1 \neq$$



in  $x = 1$   $f$  non è derivabile e c'è un p.to angoloso.

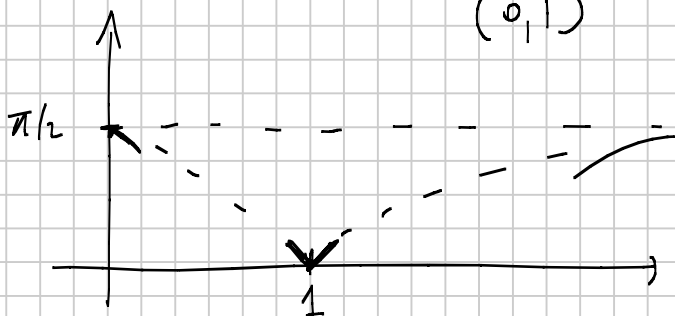
Segno della  $f' = \begin{cases} \frac{1}{1+\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} ; x > 1 \\ -\frac{1}{1+\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} ; 0 < x < 1 \end{cases}$

$$x > 1 \quad f'(x) > 0$$

$\Rightarrow f$  è strett. crescente  $(1, +\infty)$

$$0 < x < 1 \quad f'(x) < 0$$

$\Rightarrow f$  è strett. decrescente  $(0, 1)$



Studio concavità e convettà di  $f$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\lg^2 x} \cdot \frac{1}{x} & ; x > 1 \\ -\frac{1}{1+\lg^2 x} \cdot \frac{1}{x} & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

$x > 1$

$$f'' = \frac{- \left[ 2 \lg x \cdot \frac{1}{x} \cdot x + (1 + \lg^2 x) \cdot 1 \right]}{(1 + \lg^2 x)^2 \cdot x^2}$$

$$= - \left( \frac{2 \lg x + 1 + \lg^2 x}{(1 + \lg^2 x)^2 x^2} \right)$$

$$= - \frac{(\lg x + 1)^2}{(1 + \lg^2 x)^2 x^2} < 0 \quad \forall x > 1$$

$\Rightarrow$  In  $(1, +\infty)$  la  $f(x)$  è  
strett. concava.

In  $0 < x < 1$  poiché  $f' = -f'$  in  $x > 1$

$$f'' = -f'' \text{ in } x > 1$$

$f''(x) \geq 0$  in  $(0, 1)$   $\Rightarrow f$  è strett.  
convessa.

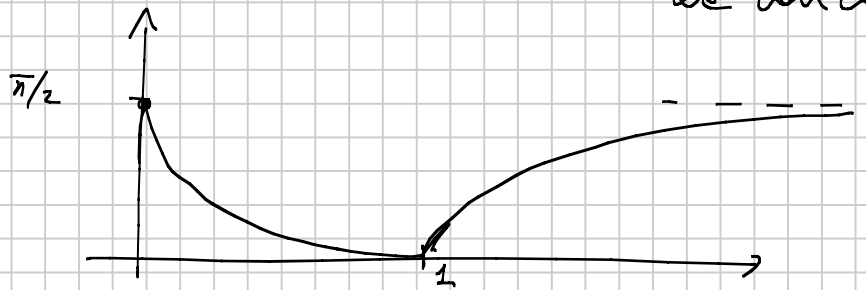
$$f''(x) = \frac{(1 + \lg x)^2}{x^2 \cdot (1 + \lg^2 x)^2} \geq 0 \quad \text{in } (0, 1)$$

$$1 + \lg x = 0 \quad \lg x = -1$$

$$x = \frac{1}{e} \in (0, 1)$$

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

e in  $x = \frac{1}{e}$   
non cambia  
la concavità.



"ottacco" del grafico in  $x=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{1+\log^2 x} - \frac{1}{x} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{1+(\log \frac{1}{t})^2} = \quad \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ x \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow +\infty \\ x = \frac{1}{t} \end{array} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{1+(-\log t)^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{1+(\log t)^2} \quad \begin{array}{l} \text{scale infiniti} \\ \text{H\o{t}el} \end{array}\end{aligned}$$

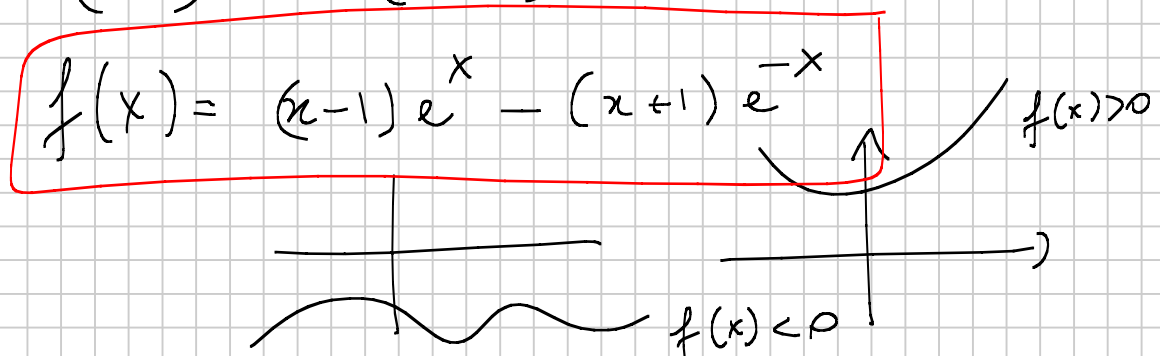
$$\begin{aligned}\text{H\o{t}el} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2 \log t \cdot \frac{1}{t}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2 \log t} \cdot t = \\ &= -\infty \\ &(\text{scale } \infty).\end{aligned}$$

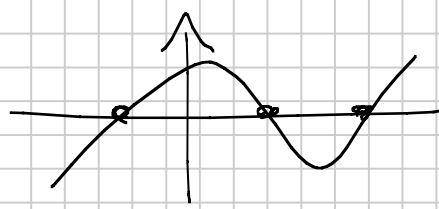
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$$

Es. Studio del grafico di una funzione per determinare l'∃ e il n° di soluzioni di un'equazione.

Det.  $x$  esistono e quante sono le soluzioni dell'equazione

$$(x-1)e^x - (x+1)e^{-x} = 0$$





$$D = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x-1)e^{-x} - (-x+1)e^x \\ &= -(x+1)e^{-x} + (x-1)e^x = f(x) \end{aligned}$$

$f$  è pari, lo studio per  $x \geq 0$ .

$$f(x) = (x-1)e^x - (x+1)e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x - (x+1)e^{-x} = +\infty$$

(vedere se c'è asintoto  
obliquo per  $x \rightarrow +\infty$ )  
(non c'è!)

$$\frac{x+1}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x - e^{-x} - (x+1)e^{-x}(-1)$$

$$= \cancel{e^x} + x e^x - \cancel{e^x} - \cancel{e^{-x}} + x e^{-x} + \cancel{e^{-x}}$$

$$= x(e^x + e^{-x})$$

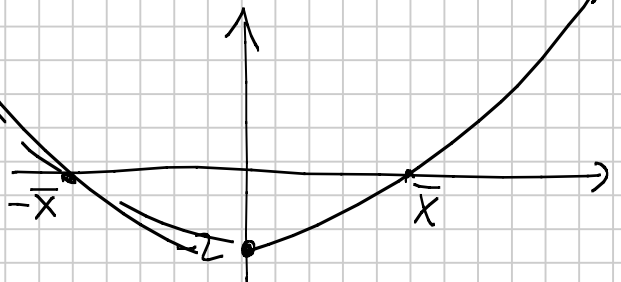
$$x \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$f' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$x=0$  f.to di massimo locale

$$f(0) = -2$$



$$\exists \pm \bar{x} \text{ t.c. } f(\pm \bar{x}) = 0$$

Percorso: calcolare  $f''$  e studiare convessità.