

Lezione del 19 Novembre

Formule di Taylor

Con la def di derivata di f in x_0
 $f'(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)_{x \rightarrow x_0}$$

polinomio
di Taylor
di grado 1.

$$x_0 = 0$$

$$f(x) = e^x$$

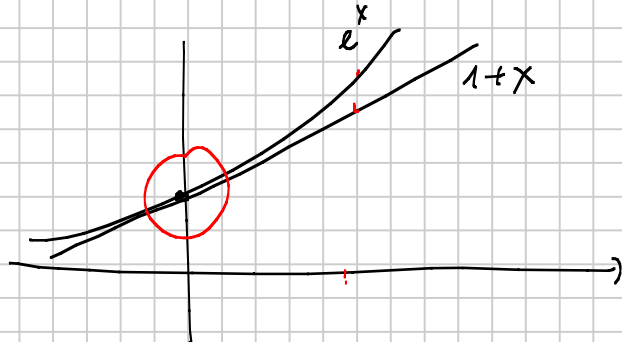
$$f'(x) = e^x$$

$$f(x_0) = e^0 = 1$$

$$f'(0) = e^0 = 1$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$x \rightarrow 0$$



è importante
che siamo
"vicini"
a $x=0$

$$\underline{\underline{e^{0,0001} = 1 + 0,0001 + \boxed{o(x)}}}$$

es. $\sin x = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$

$$f(x) = \sin x - x = \cancel{x} + o(x) - \cancel{x} = o(x)$$

è un'informazione incompleta
ci farebbe trovare una informazione
del tipo $\sin x - x = x^2 + o(x^2)$

Polinomio di Taylor

Dato $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ interno ad I
 f derivabile n -volte in x_0 . Si dice
polinomio di Taylor di grado n centrato
in x_0 il polinomio

$$\begin{aligned} P_{x_0}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ &+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \end{aligned}$$

Teorema (Resto di Peano)

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 interno ad I
 f derivabile n volte in x_0 . Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)_{x \rightarrow x_0}$$

$$o((x-x_0)^n) = \text{resto di Peano}$$

Polinomi di Taylor delle funzioni elementari

$$x_0 = 0$$

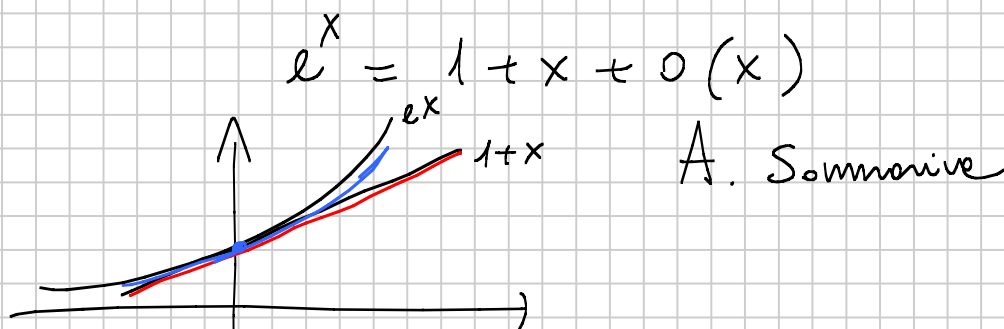
$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x = f^{(k)}(x) \quad f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned} e^x &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ &+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

$$e^x = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad x \rightarrow 0$$

Se vogliamo approssimare e^x con un polinomio di grado 2 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $x \rightarrow 0$



più aumenta il grado del polinomio di Taylor più il polinomio "si avvicina" alla $f(x)$ vicino a $x = x_0$.

$f(x) = \sin x$	$x = 0$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$		$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$		$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$		$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$		$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x = f'(x)$		$f^{(5)}(0) = 1$

$$\sin x = 0 + 1 \cdot (x) + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + 1 \cdot \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

↓
dispari

↓
dispari

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}) \quad x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6).$$

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^k) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \frac{\log(1+x)}{x} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0 \\ \log(1+x) = x + o(x) \end{array} \right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \quad x \rightarrow 0.$$

oss. Se conosco lo sviluppo di Taylor per $f(x)$ possiamo ricavare anche lo sviluppo di Taylor di altre funzioni

es. $f(x) = \sin(\sqrt{x}) \quad \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ y = \sqrt{x} \rightarrow 0 \end{array}$

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$$

$$\sin \sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{3!} + o(x^{3/2})$$

$$f(x) = \sin(\sqrt{x} + 1)$$

$$y = \sqrt{x} + 1$$

$$x \rightarrow 0$$

$$y \not\rightarrow 0$$

non ci può essere lo sviluppo di Taylor perché $y \not\rightarrow 0$

$$\sin y \quad y \rightarrow 0$$

$$\text{es. } \log(1 + X^5)$$

$x \rightarrow 0$

$X^5 \rightarrow 0$

$y = X^5 \rightarrow 0$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$$

$$\log(1+X^5) = X^5 - \frac{1}{2} X^{10} + \frac{1}{3} X^{15} + o(X^{15})$$

Calcolo dei limiti con gli sviluppi di Taylor

oss. $X_0 = 0$ (si disecca de McLaurin)

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x + \log(1+x)}{e^x - 1 + x^2} =$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$x \rightarrow 0$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x + o(x) + x + o(x)}{1 + x + o(x) - 1 + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + o(x)}{x + x^2 + o(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + o(x)}{x + o(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \left(3 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(1 + \frac{o(x)}{x} \right)} = \frac{3}{1} = 3$$

$\begin{matrix} x^2 = o(x) \\ \frac{x^2}{x} \rightarrow 0 \\ \frac{x^2}{x} \rightarrow 0 \end{matrix} \quad ? \quad \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \end{matrix}$

Se avessimo fatto lo sviluppo fino a ordine "3"

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x + \log(1+x)}{e^x - 1 + x^2} =$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - 1 + x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= 3$$

"contano" le potenze di
grado minore
cioè $\frac{3x}{x}$.

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^3 - \sin x}{\log(1+x^3)} =$$

$$\sin x = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

$$\log(1+x^3) = x^3 + o(x^3)$$

$$\log(1+y) = y + o(y)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + 2x^3 - \cancel{x} - o(x)}{x^3 + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - o(x)}{x^3 + o(x^3)} \rightarrow ?$$

non sappiamo
Cosa c'è
"dentro" $o(x)$
ci possono essere potenze
di x determinanti per
il limite.

Ph.: ci siamo fermati troppo presto
nello sviluppo del $\sin x$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^3 - \sin x}{\log(1+x^3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + 2x^3 - \cancel{x} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{13}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{13}{6}$$

esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \sin x}{1 - \cos x} =$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^3}{x^4+x}} - \cos x}{\sin(x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(x^3+1)} = 0$$

$$y = \frac{x^3}{x^4+x}$$

$$\text{se } x \rightarrow 0 \quad y \rightarrow 0$$

$$e^y = 1 + y + o(y)$$

$$e^{\frac{x^3}{x^4+x}} = 1 + \frac{x^3}{x^4+x} + o\left(\frac{x^3}{x^4+x}\right) = 1 + \frac{x^2}{x^3+1} + o(x^2)$$

$$\frac{x^3}{x^4+x} \sim \frac{x^2}{x^3+1} \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{x^3+1} + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

$$\text{se } x^2 = x^2 + o(x^2) \quad (\text{se } y = y + o(y))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^3+1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3 + 1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$