

Lezione del 1 Dicembre

Serie numerice

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_n s_n$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

successive
differenz summe
formel

a_k = termini della serie

• $\sum a_k$ converge $\Rightarrow \lim_k a_k = 0$

• Seve a termini finiti $a_k \geq 0$
(tutti hanno "sempre" lo stesso segno)
almeno da un certo k in poi

* Non sono mai un negoziante

* Criterios del confronto

11 11 eritritol

* Criterio del rapporto $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ e della radice $\sqrt[k]{a_k}$

• $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$

• $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge $(\Leftrightarrow) \alpha > 1$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 (\log k)^\beta} \text{ converge } \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{se } d > 1 \\ \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \text{se } d = 1 \\ \forall \beta > 1 \end{matrix}$$

es. $\sum \frac{1}{k^3 (\log k)^{1/10}}$ converge

$$\sum \frac{(\log k)^{100000}}{k^2} \text{ converge}$$

$$\sum \frac{1}{k (\log k)^2} \quad \text{converge}$$

$$\sum \frac{1}{k \log k} \quad \begin{matrix} d=1 \\ p=1 \end{matrix} \quad \text{non converge}$$

$$\sum \frac{1}{k} \quad \sum \frac{1}{k \log k} \quad \sum \frac{1}{k^2}$$

es. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^5 (\log^2 k + \log k + 1)}$

$$a_k = \frac{1}{k^5 \log^2 k \left(1 + \frac{1}{\log k} + \frac{1}{\log^2 k} \right)} \sim \frac{1}{k^5 \log^2 k}$$

del confronto
asintotico

$$\sum a_k \text{ conv.} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{k^5 \log^2 k} \quad \begin{matrix} \text{converge} \\ d=5 > 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ converge.}$$

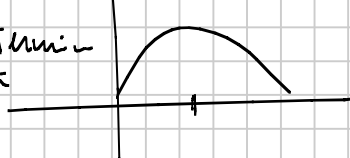
es. $\sum \frac{1}{\sqrt{k} \log^{10000} k} \quad \begin{matrix} d = \frac{1}{2} \\ \text{non converge.} \end{matrix}$

Serie a termini di segno variabile

es. $\sum_{k=0}^{+\infty} \sin k$ termini di segno variabile

$$\sum \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

serie a termini positivi



$$\sum \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} + \dots$$

una di un hp ^{a segno variabile} principale
 "Segno alternato"

$$\sum \frac{\cos(\pi k)}{k}$$

$$(-1)^k = \cos \pi k = \begin{matrix} 1 & k \text{ pari} \\ -1 & k \text{ dispari} \end{matrix}$$

$$\sum a_k \quad a_k \text{ hanno segno variabile}$$

$$|a_k| \geq 0$$

$$\sum |a_k| \quad \text{serie a termini positivi}$$

Def. $\sum a_k$ si dice che converge
assolutamente se $\sum |a_k|$ converge.

es. $\sum \frac{(-1)^k}{k^2} \quad a_k = \frac{(-1)^k}{k^2}$

$$|a_k| = \frac{1}{k^2}$$

$$\sum |a_k| = \sum \frac{1}{k^2} \quad \text{converge}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{converge assolutamente.}$$

es. $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} \lg k} \quad \text{converge assolutamente?}$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k} \lg k} \quad \alpha = 1/2 \quad \text{No!}$$

non conv. assolutamente

Relazione tra conv. assoluta di una
 serie e convergenza (semplice) di una
 serie.

Teorema Se una serie converge assolutamente allora converge (semplicemente).

es. $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ converge assolutamente (vedi prima)
e quindi è convergente

es. $\sum \frac{\sin k}{k^3}$

$$a_k = \frac{\sin k}{k^3} \rightarrow 0$$

è soddisfatta
la condizione
necessaria di
convergenza

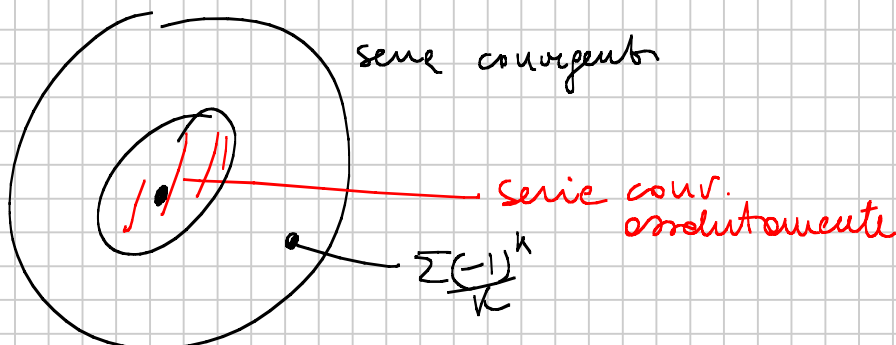
vediamo se la serie
conv. assolutamente

$$|a_k| = \frac{|\sin k|}{k^3} \leq \frac{1}{k^3}$$

dal criterio del confronto (sono serie a
termini positivi!), poiché $\sum \frac{1}{k^3}$

converge $\Rightarrow \sum |a_k|$ converge

cioè $\sum a_k$ conv. assolutamente $\Rightarrow$ dal teorema
precedente $\sum a_k$ converge
 $\sum \frac{\sin k}{k^3}$ converge.



conv. assoluta $\Rightarrow$ convergenza
convergenza $\nRightarrow$ convergenza assoluta.

es. $\sum \frac{(-1)^k}{k}$

convergenza assoluta $|a_k| = \frac{1}{k}$

$\sum |a_k| = \sum \frac{1}{k}$ non converge

$\sum \frac{(-1)^k}{k}$ non converge assolutamente

ma dimostreremo che converge.

$\sum a_k$

a_k termini a segno variabile

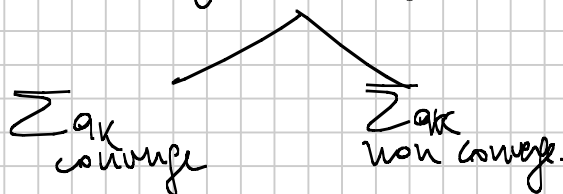
? $a_k \rightarrow 0$ (vedere se è verificata la condizione necessaria)

? $\sum |a_k|$

serie a termini positivi
non possono applicarle i criteri
delle serie a termini positivi

se $\sum |a_k|$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge.

se $\sum |a_k|$ non converge $\Rightarrow$?



Serie con termini di segno alterno

$\sum (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$

Criterio di Leibniz $\sum (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$

1) a_k successione decrescente

2) $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

$\Rightarrow$ la serie $\sum (-1)^k a_k$ converge

es. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ non conv. assolutamente
ma potrebbe convergere.

$$a_k = \frac{1}{k}$$

1) $\frac{1}{k}$ è decrescente

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

$\Rightarrow$ per il criterio di Leibniz $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

oss. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
NON CONVERGE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

CONVERGE

oss. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ 1) a_k decrescente
2) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

Come si fa a capire se una successione è decrescente.

$$a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k$$

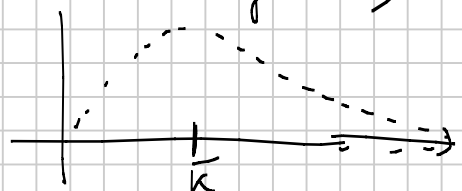
(basta che sia decrescente da un certo k in poi)

es. $a_k = \frac{1}{k}$
con la def.

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} = a_k$$

$$\cancel{k} \leq \cancel{k+1}$$

vero $\forall k$



es. $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{k^2+k}$ Studiare la convergenza.

• serie con termini di segno alternato

• Studiare conv. assoluta

$$\sum |a_k| = \sum \frac{k-1}{k^2+k}$$

serie a termini positivi

$$a_k = \frac{k-1}{k^2+k} = \frac{k(1-\frac{1}{k})}{k^2(1+\frac{1}{k})} = \frac{1}{k} \frac{(1-\frac{1}{k})}{(1+\frac{1}{k})}$$

$$\Rightarrow a_k \sim \frac{1}{k} \quad \text{dal criterio del confronto asintotico}$$

perché $\sum \frac{1}{k}$ diverge $\Rightarrow \sum \frac{k-1}{k^2+k}$ diverge.

$$\Rightarrow \sum (-1)^k \left(\frac{k-1}{k^2+k} \right) \quad \text{non converge assolutamente}$$

ma potrebbe convergere.

Uso il criterio di Leibniz.

$$a_k \geq 0$$

1) a_k decrescente

2) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ ok.

$a_k = \frac{k-1}{k^2+k}$ è decrescente?

$a_{k+1} \leq a_k$

$$\frac{(k+1)-1}{(k+1)^2+(k+1)} \leq \frac{k-1}{k^2+k}$$

$$\frac{k}{(k+1)((k+1)+1)} \leq \frac{k-1}{k(k+1)}$$

$$\frac{k}{k+2} \leq \frac{k-1}{k}$$

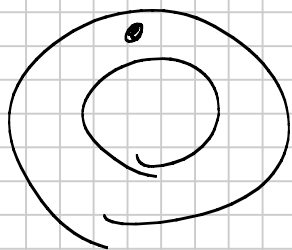
$$k^2 \leq (k+2)(k-1)$$

$$k^2 \leq k^2 - k + 2k - 2$$

$$\forall k \geq 2$$

$$a_{k+1} \leq a_k$$

$$\Rightarrow \text{vale il criterio di Leibniz} \Rightarrow \sum (-1)^k \frac{k-1}{k^2+k}$$



converge.
ma non conv.
assolutamente.

Es.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\log k}{k}$$

• è verificata la condiz. necessaria di conv.

$$(-1)^k \frac{\log k}{k} \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty$$

• conv. assoluta

$$\sum \frac{\log k}{k}$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = -1$$

$$\sum \frac{1}{k^{\alpha} (\log k)^{\beta}}$$

NON CONVERGE

No conv. assoluta.

• convergenza (semplice)

$$\sum (-1)^k \frac{\log k}{k} \geq 0$$

criterio di Leibniz.

1) $\frac{\log k}{k}$ decrescente

2) $\frac{\log k}{k} \rightarrow 0 \quad k \rightarrow +\infty$

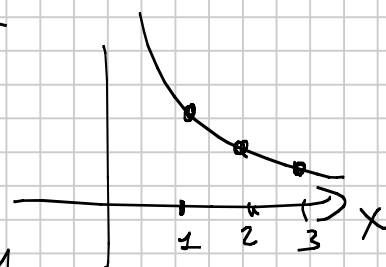
Si!
scade
infinito

1) $\frac{\log k}{k}$ decrescente?

$$a_{k+1} \leq a_k$$

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} < 0$$

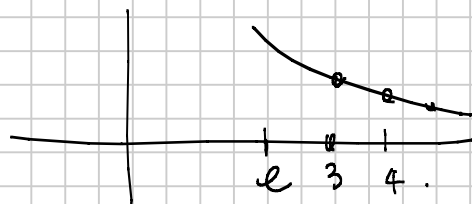


$$f'(x) < 0 \quad \text{sse} \quad \lg x > 1$$

$$x > e$$

$f(x)$ è decrescente

$$\forall x > e = 2,71 \dots$$



$$\forall k > 3$$

che maggiore $\frac{\lg k}{k}$
è decrescente.

$\Rightarrow$ sono valicate le ipotesi del criterio di
Leibniz $\Rightarrow \sum (-1)^k \frac{\lg k}{k}$ converge
(ma non conv. assolutamente)