

Lezione del 20 Novembre

Teorema di Taylor (con resto di Peano)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$x_0 = 0$ polinomi di McLaurin.

es. (di ieri)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x) - \sin x}{1 - \cos x}$$

Numero: qual'è l'ordine di infinitesimo del numeratore?

Voglio cioè trovare

$$\log(1+x) - \sin x = X^2 + o(X^2)$$

dimò che 2 è l'ordine di infinitesimo.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$x \rightarrow 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \log(1+x) - \sin x &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

$\log(1+x) - \sin x$ è infinitesimo di ordine 2

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x) - \sin x}{1 - \cos x}$$

se si volesse fare con i limiti notevoli

$$\frac{\frac{\log(1+x)}{x} \cdot x - \frac{\sin x}{x} \cdot x}{\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x^2}$$

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sin x = x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

on a aussi

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\log(1+x) - \sin x = x + o(x) - x + o(x)$$

$$= o(x)$$

Quindi non basta lo sviluppo al 1^{re} ordine (che è equivalente ad usare i limiti notevoli).

$$\text{Es. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^x - \sin(x+x^2) - 1 + \log(1+x)}{x \operatorname{arctg} x}$$

$$3^x = e^{x \log 3}$$

$$x \rightarrow 0 \quad x \log 3 \rightarrow 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$3^x = e^{x \log 3} = 1 + x \log 3 + \frac{x^2 \log^2 3}{2} + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin(x+x^2)$$

$$x \rightarrow 0 \quad x+x^2 \rightarrow 0$$

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$$

$$\sin(x+x^2) = x+x^2 - \frac{1}{6} (x+x^2)^3 + o((x+x^2)^3)$$

$$+ o((x+x^2)^3) =$$

$$= x + x^2 - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

tranne x^3
c'è la
potenza
+ piccola.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^x - \sin(x+x^2) - 1 + \log(1+x)}{x \operatorname{arctg} x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \lg 3 + \frac{x^2}{2} \lg^2 3 + o(x^2) - x - x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)}{-1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} =$$

$$\frac{-1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x (\lg 3) + o(x)}{x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \lg 3}{x^2} = +\infty$$

es.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{1}{n^3} \right) - \frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}$$

studiare il
limite al
variare del
parametro
di reale
e positivo.

perché $\frac{1}{n^3} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{n^3} = x$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3)$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^9} + o \left(\frac{1}{n^9} \right)$$

x $\frac{1}{n^2}$

$$e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2 n^{2 \cdot 2}} + o \left(\frac{1}{n^{2 \cdot 2}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{1}{n^3} \right) - \frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{3 n^9} + o \left(\frac{1}{n^9} \right) - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2 n^{2 \cdot 2}} + o \left(\frac{1}{n^{2 \cdot 2}} \right) - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3 n^9} + o \left(\frac{1}{n^9} \right)}{\frac{1}{2 n^{2 \cdot 2}} + o \left(\frac{1}{n^{2 \cdot 2}} \right)} =$$

$$\frac{1}{n^\alpha} \sim o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{3 n^9} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} n^{\alpha-9}$$

$\alpha > 9$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} = +\infty$

$\alpha = 9$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{3}$

$\alpha < 9$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} = 0$

O.S.S.

$$\sin x = x + o(x) \quad (x \rightarrow 0) \Leftrightarrow \sin x \sim x \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \Leftrightarrow \sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} \quad (x \rightarrow 0)$$

In generale se

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow x_0)$$

es. Per Cose

13/12/12

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x^a} & x > 0 \\ 1 + bx + x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

1) $a > 0, b \in \mathbb{R}$ la funzione è continua in $\mathbb{R}$

2) $a > 0, b \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$.

SERIE NUMERICHE

Vogliamo dare una def. rigorosa di
"somme infinite di numeri"

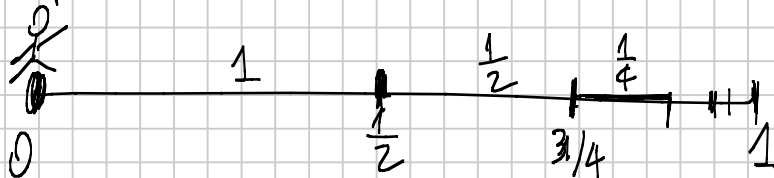
$$\frac{1}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \text{lo so fare}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1000} = //$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = ?$$

Paradosso di Zenone



1 minuto per arrivare

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots =$$

= somme infinite $\Rightarrow +\infty$!

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = ?$$

Def. $\{a_k\}$ successione di numeri reali
Voglio definire $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Costruiamo un'altra successione S_n

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

S_n si chiama successione delle somme parziali (o somme ridotte)

Dico che $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

es. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$? cosa significa

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$\vdots$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \stackrel{?}{=} \lim_n S_n$$

Quindi una serie numerica è il limite della successione delle somme parziali S_n .

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \stackrel{?}{=} \lim_n S_n$$

↓ termini della serie

successione delle somme parziali.

Def.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

$\bar{e}$

- CONVERGENTE a S
- DIVERGENTE a $\pm \infty$
- IRREGOLARE

se $\exists$ finito $\lim_n S_n = S$

se $\lim_n S_n = \pm \infty$

se $\nexists \lim S_n$.

Studiare il carattere di una serie

significa studiare se è convergente,
divergente o irregolare

Es.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k$$

Calcolo la successione delle somme
parziali S_n

$$S_1 = -1$$

$$S_2 = -1 + 1 = 0$$

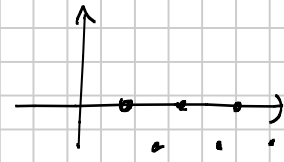
$$S_3 = \underbrace{0}_{S_2} + (-1) = -1$$

$$S_4 = \underbrace{-1}_{S_3} + 1 = 0$$

$$S_n = \begin{cases} -1 & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \text{ è irregolare.}$$



oss. In questo esempio ho trovato il modo
di scrivere esplicitamente S_n
e quindi di calcolare il $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ($\neq$).

Altro caso in cui riesco a calcolare
 S_n .

Es. Serie geometrica. $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \text{serie geometrica di ragione } q.$$

$$\text{es. } \sum_{k=0}^{+\infty} 3^k = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots$$

serie geom. di ragione 3

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

serie geom. di ragione $\frac{1}{2}$

Voglio calcolare S_n cioè la somma finita.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$q = 1$$

$$S_n = n + 1$$

$$\lim_n S_n =$$

$$= \lim_n (n+1) = +\infty$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty = \lim_n S_n$$

cioè divergente

$$q \neq 1$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \stackrel{?}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

In fatti

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \stackrel{?}{=} 1 - q^{n+1}$$

$$1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1}$$

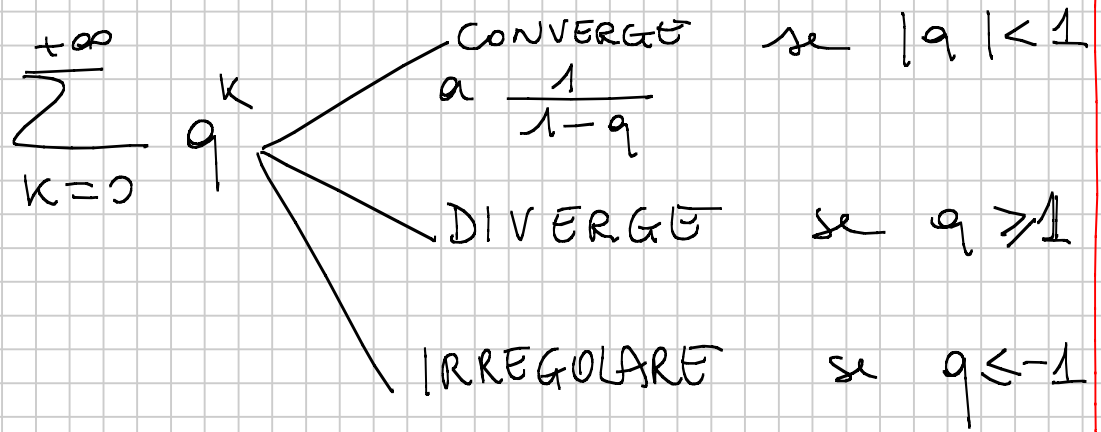
$$= 1 - q^{n+1}$$

$$q \neq 1$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & |q| < 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{non esiste} & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \xrightarrow{\text{CONVERGE}} \frac{1}{1 - q} \text{ se}$$



$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$\left| \frac{q}{1} \right|_0^2$
 ci mette 1
 2 minuti
 e arriva!