

Lezione del 20 Ottobre

Topologia in $\mathbb{R}$

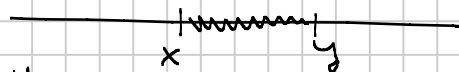
Distanza euclidea

$$x, y \in \mathbb{R} \quad d(x, y) = |x - y|$$

(distanza "naturale")

$$|x - y| \geq 0$$

$$|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$



1) disuguaglianza triangolare:
valore per il valore assoluto

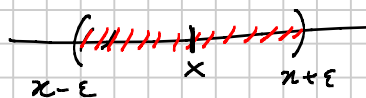
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$2) |x - y| \leq |x| + |y|$$

$$3) ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Def. $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$

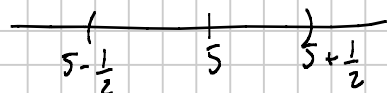
Intorno di x



$$B_\varepsilon(x) = \mathcal{U} = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\}$$

$$= (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Es. $x = 5$ e $\varepsilon = 1/2$ $\mathcal{U} = (5 - 1/2, 5 + 1/2)$



Intorni di " $+\infty$ " e " $-\infty$ ".

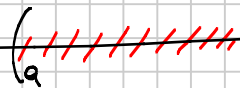
Ampliamo $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

^{retta}
"ampliata"

Def. Intorno di $+\infty$ è
un intervallo del tipo

$$\mathcal{U} = (a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$$



Intorno di $-\infty$ è

$$\mathcal{U} = [-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$$



Es. $f(x) = \frac{1}{x}$

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

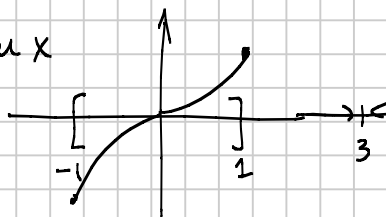
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} \quad x_0 \in D$$

ci interesserebbe fare il limite $x \rightarrow 0$
anche se $0 \notin D$

es. $f(x) = \arcsin x$

$$D = [-1, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x$$



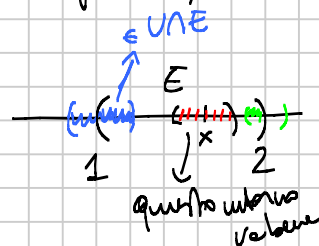
x_0 sarà un punto $\in [-1, 1]$

non ha senso fare $\lim_{x \rightarrow 3} \arcsin x$

Def. $E \subset \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}^*$ si dice di accumulazione per E se ogni intorno di x contiene un punto di E diverso da x .

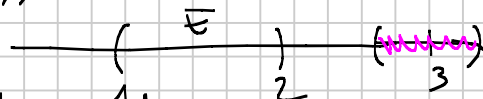
$$(\forall U \text{ intorno di } x \exists y \neq x, y \in U \cap E)$$

Es. $E = (1, 2)$



• ogni $x \in E$ è di accumulazione

• $x=1$ è di accumulazione
 $x=2$ " " "

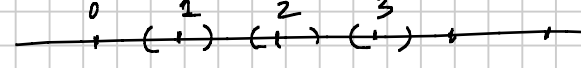


• $x=3$ non è di accumulazione
(ho trovato U che non ha intersezione con E)

Quindi i p.h di accumulazione per E sono tutti $[1, 2]$

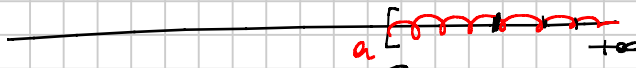
es. $E = [a, b]$ 
l'insieme di tutti i p.h di accumulazione è $[a, b]$.

oss. i p.h di accumulazione di un insieme E non è detto che appartengano ad E
(vedi es. 1)

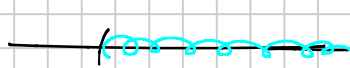
es. $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ 

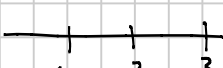
in $\mathbb{R}$ non ci sono j.h. di accumulazione
i punti si dicono ISOLATI

$\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}^*$ allora $+\infty$ è
di accumulazione per $\mathbb{N}$:


 $\forall U$ intorno di $+\infty \exists y \neq +\infty$
 $y \in U \cap \mathbb{N}$
Infatti in $U = [a, +\infty)$ $\exists n \in \mathbb{N}, n > a$
 $n \in U \cap \mathbb{N}$

(Quindi per le successioni preso)
 $\lim_{n \rightarrow +\infty}$

es. $E = (a, +\infty)$ 
i punti di accumulazione
sono $[a, +\infty)$ e anche $+\infty$

es. $E = \{1, 2, 3\}$ 
non ha j.h. di accumulazione.

Teorema di Bolzano-Weierstrass

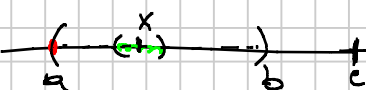
$E \subseteq \mathbb{R}$ limitato e infinito
(cioè con infiniti elementi). Allora
esiste almeno $x \in \mathbb{R}$ che è
di accumulazione per E

Insieme aperti e chiusi

$E \subseteq \mathbb{R} \quad C E = \mathbb{R} \setminus E$

Classifico i punti di $\mathbb{R}$ rispetto a E

Def. $E \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ è INTERNO
a E se $\exists$ un intorno di x tutto
contenuto in E $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

es. $E = (a, b)$ 

$x \in E \Rightarrow x$ è interno

$x=a$ o $x=b \Rightarrow x$ non è interno

$x > b$ o $x < a \Rightarrow //$ //

Def. $E \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ è punto ESTERNO a E se è interno al CE .

Es.

1) $x > b$
 $\bar{x}$ esterno

$x < a$
 $\bar{x}$ esterno

2) $x=a$ non sono neanche
 $x=b$ esterni.

Def. x è un punto di frontiera per E se non è né interno né esterno

Es. $E = (a, b)$ $x=a$ e $x=b$ sono punti di frontiera.

$\partial E =$ frontiera di $E = \{a, b\}$.

punti interni = (a, b)

punti esterni = $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

Def. $E \subseteq \mathbb{R}$ è APERTO se ogni suo elemento è un p.to interno di E .

$E \subseteq \mathbb{R}$ è CHIUSO se

CE è aperto.

(Per def. $\emptyset$ è aperto)

Es. $E = (a, b)$
è aperto

$E = (a, +\infty)$
 $x > a$ è aperto

$E = [a, +\infty)$
 $x > a$ sono interni a
ma $x=a$ non è interno

E non è aperto

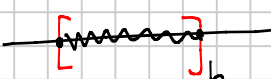
$CE =$

$CE = (-\infty, a)$ sono tutti punti interni
cioè CE è aperto

$\Rightarrow E = [a, +\infty)$ è chiuso

oss $A \in B$ aperti $\Rightarrow A \cup B$ è aperto
 $A \cap B$ " "

$A \in B$ chiusi $\Rightarrow A \cup B$ è chiuso
 $A \cap B$ " "

es. $E = [a, b]$ 

$x = a$ e $x = b$ non sono interni $\Rightarrow E$ non è aperto

$CE = \underbrace{(-\infty, a)}_{\text{aperto}} \cup \underbrace{(b, +\infty)}_{\text{aperto}} \Rightarrow \text{aperto}$

$\Rightarrow E = [a, b]$ chiuso.

es. $E = (a, b]$ 

E non è aperto perché $b \in E$ non è interno

$CE = \underbrace{(-\infty, a]}_{\text{chiuso}} \cup \underbrace{(b, +\infty)}_{\text{aperto}}$ non è né aperto né chiuso

es.

- (a, b) aperto
- $[a, b]$ chiuso
- $[a, b)$ né aperto, né chiuso
- $[a, +\infty)$ chiuso
- $(a, +\infty)$ aperto
- $(-\infty, a]$ chiuso
- $(-\infty, a)$ aperto.

es. Diseg. con le radici quadrate

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \quad f(x) \geq 0$$

$y_1 \geq y_2$

1) $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

verifichiamo la disequazione

2) $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

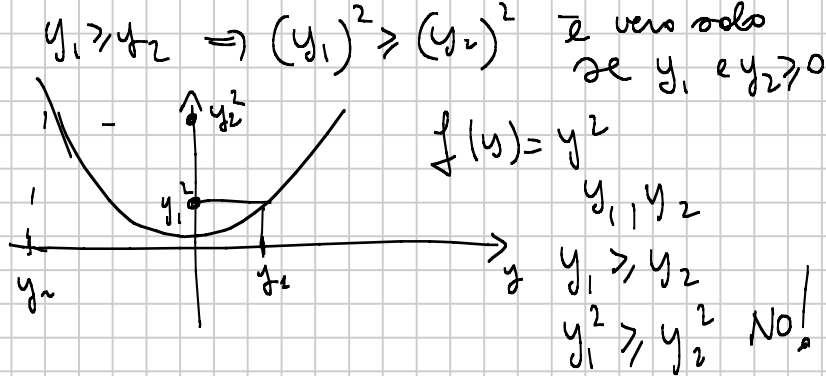


$y_1 \geq y_2$

$\Downarrow$?
 $(y_1)^2 \geq (y_2)^2$

x crescente $\Leftrightarrow y \geq 0$

$f(y) = y^2$ 



2) $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ qui possiamo elevare al quadrato

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

es. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \geq 2x$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1) $x < 0$ la diseq. è verificata.

2) $x \geq 0$ elevo al quadrato

$$x^2 - 2x + 1 \geq 4x^2$$

$$-3x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$3x^2 + 2x - 1 \leq 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3} \begin{matrix} 1/3 \\ -1 \end{matrix}$$

$x \geq 0$

$$\left[-1, \frac{1}{3} \right]$$

2) $\left[0, \frac{1}{3} \right]$

Soluzioni $\left(-\infty, \frac{1}{3} \right]$ (è chiuso)

es.

$$\sqrt{4x^2 - 9x + 2} < 2x + 1$$

$$4x^2 - 9x + 2 \geq 0 \quad x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8}$$

$$x \geq 2, \quad x \leq \frac{1}{4} \quad \left| \quad = \frac{9 \pm 7}{8} < \frac{1}{4} \right.$$

$$1) 2x+1 < 0 \Rightarrow x < -1/2 \quad \text{MAI VERIFICATA}$$

$$2) 2x+1 > 0 \quad \text{in fine elevare al quadrato}$$

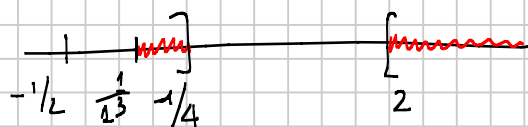
$$\boxed{x > -1/2}$$

$$4x^2 - 9x + 2 < (2x+1)^2$$

$$4\cancel{x^2} - 9x + 2 < 4\cancel{x^2} + 1 + 4x$$

$$-13x < -1 \quad 13x > 1$$

$$x > 1/13$$



in aperto
in chiuso

$$\text{Soluzioni } \left(\frac{1}{13}, \frac{1}{4} \right] \cup [2, +\infty)$$