

Lezione del 22 Ottobre

VECCHI APPELLI

IAM1
IAM2

> IAM

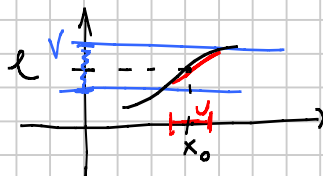
appelli di IAM1
MOODLE di IAM2
(Vittoria)

Limiti di funzione

Def. generale

$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, l.h. di accumulazione per X
 $l \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall V$ intorno di $l \exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U \cap X, x \neq x_0$, $f(x) \in V$



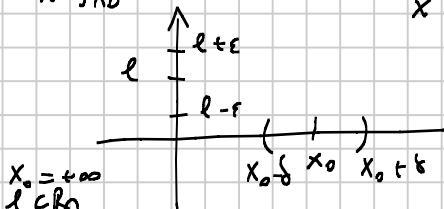
$x \in \mathbb{R} \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

$x = +\infty \quad (a, +\infty)$

$x = -\infty \quad (-\infty, b)$

$x_0, l \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta$
 $x \in X, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \dots$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \dots$

Per caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ scrivere con gli "intorni" "espliciti" la definizione

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

oss. Se il limite è "sbagliato" non si riesce a verificare la definizione

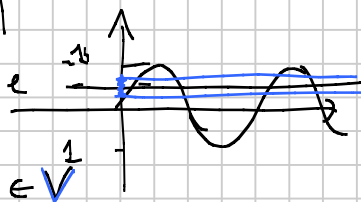
oss. Con la def. di limite si può anche dim. che un limite $\nexists$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \nexists$



oppure si può far vedere

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \nexists$



$\nexists m: \forall x > m \sin x \in V$

Proprietà dei limiti

Teorema Unicità del limite

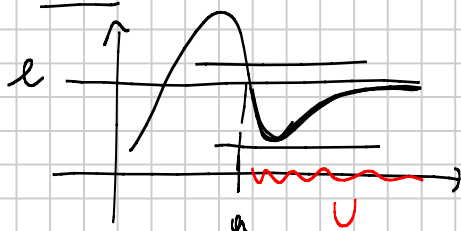
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$
allora $l_1 = l_2$

Dim. no.

Teo. (limitatezza di funzioni che hanno
limite finito)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists U$ di x_0 t.c. $f(x)$
è limitata $\forall x \in U$

Dim. no!



$$x_0 \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

oss. $f(x)$ è limitata in $U \Leftrightarrow \exists M \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in U$

oss. Se $f(x)$ è limitata in un intorno di x_0
 $\nRightarrow f(x)$ ha limite per $x \rightarrow x_0$

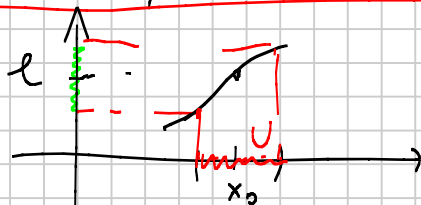
$$f(x) = \sin x$$

$|\sin x| \leq 1$ è limitata $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ma non ha
limite per $x \rightarrow +\infty$



Teorema della permanenza del segno

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0 \Rightarrow \exists U$ di x_0 t.c. $f(x) > 0 \quad \forall x \in U$
 $x_0, l \in \mathbb{R}^*$



(ha "definitivamente"
cioè da
 $f(x) > 0$ "definitivamente"
in x_0)

si può anche enunciare così:

2) se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in U \Rightarrow l \geq 0$
intorno di x_0 e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

inoltre se fosse per assurdo che $l < 0$

$\Rightarrow l < 0$ (dal teo della permanenza del
segno nella forma 1) scatto con < 0 invece
che > 0) si ha che $f(x) < 0$ in
un intorno
di x_0
e questo è assurdo.

Teo. permanenza segno.

oss. 1) se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ in un intorno.

non vale il viceversa:

se $f(x) > 0$ in un intorno di x_0 ~~$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$~~

es. $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = +\infty$

$\forall x \neq 0$ $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

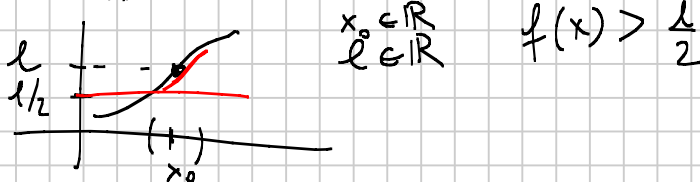
ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = l$
 quindi se $f(x) > 0$ in un intorno di $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$
 e non > 0

Conseguenza

• $f \leq g$ in un intorno $\Rightarrow l_1 \leq l_2$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f = l_1$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} g = l_2$

(ci serve la permanenza del segno a $f - g \leq 0 \Rightarrow l_1 - l_2 \leq 0$.)

Es. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0 \Rightarrow$ in un intorno di x_0



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |f(x) - l| < \varepsilon \text{ se } |x - x_0| < \delta$$

$$\Downarrow$$

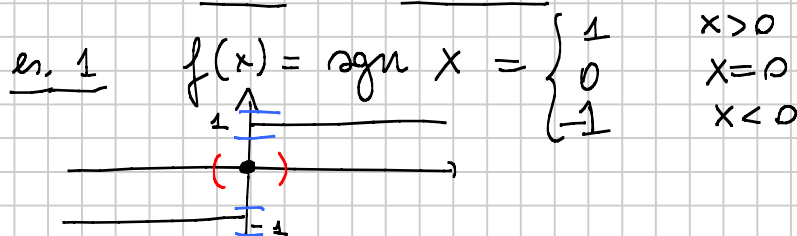
$$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \text{ se } |x - x_0| < \delta$$

$$f(x) > l - \varepsilon \text{ se prendo } \varepsilon = l/2$$

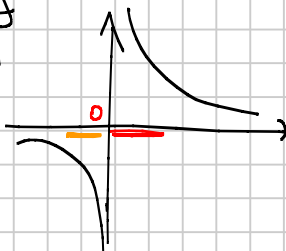
$$f(x) > l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \text{ se } |x - x_0| < \delta$$

Limite destro e sinistro

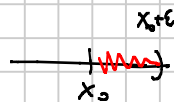


$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x \nexists$$

es. 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

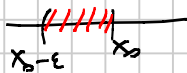


Def. U intorno destro di $x_0 \in \mathbb{R}$
 se $U = (x_0, x_0 + \varepsilon)$



U " sinistro " "

se $U = (x_0 - \varepsilon, x_0)$



Def. x_0 p.to di accumulazione destro per X
 se $\forall$ intorno destro di $x_0 \exists$ almeno
 un $x \in X$.

(e analog. per p.to di accumulazione sx)



$x = a$
 intorno destro
 p.to di accumulazione
 destro

$x = b$ p.to
 di accumulazione
 sx

Def. di limite destro e sinistro

$f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 p.to di accumulazione
 destro (sinistro) per X

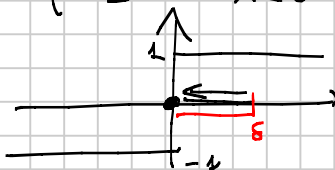
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \\ l \in \mathbb{R} \quad |f(x) - l| < \varepsilon \\ \text{"limite destro"} \quad \text{se } x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \\ |f(x) - l| < \varepsilon \\ \text{se } x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{matrix}$$

Es. $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$



$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |f(x) - 1| < \varepsilon$

$\forall x \in (0, \delta)$

sempre verificate $\forall \delta$, perché se $x > 0$

quindi $|f(x) - 1| = 0 < \varepsilon$ $f(x) = 1$

oss. si capisce perché non occorre $\forall x \in U$
 $x \neq x_0$

in questo caso $x = x_0 = 0$

non è vero che $|f(x_0) - 1| < \varepsilon$

$$|f(0) - 1| = 1 < \varepsilon \text{ no!}$$

Analog $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{sgn} x = -1$

oss. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

si usa per dim. che $\nexists$ l.t.e.

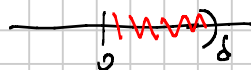
Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$

es. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Leftrightarrow \forall V$ intorno di $l (+\infty)$
 $\exists U$ intorno destro di 0 t.c.
 se $x \in U \Rightarrow f(x) \in V$

$$V = (m, +\infty)$$

$$U = (0, \delta)$$

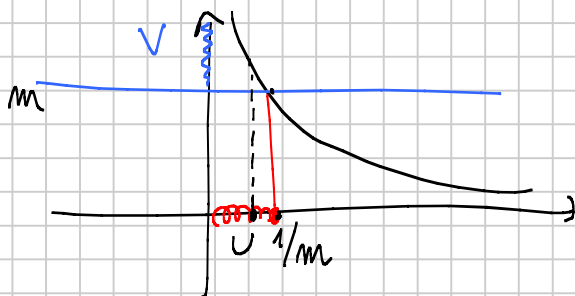


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Leftrightarrow \forall m \exists \delta > 0 \text{ t.c.}$$

$$\text{se } 0 < x < \delta \Rightarrow \left(\frac{1}{x} > m \right)$$

$$\frac{1}{x} > m \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{m} =: \delta$$

ha dim. che $\forall m \exists \delta : \delta = \frac{1}{m}$



Però $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



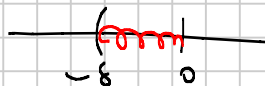
$\nexists V$ intorno di $-\infty \Rightarrow \nexists U$ intorno sinistro di 0

$$\text{t.c. } x \in U \Rightarrow f(x) \in V$$

$$V = (-\infty, m) \quad U = (-\delta, 0)$$

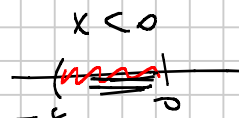
$$f(x) \in V \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{x} < m} \quad x < 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \Leftrightarrow \forall m \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \frac{1}{x} < m \quad \forall x \in (-\delta, 0)$$

$$\frac{1}{x} < m \quad \text{se } m > 0$$



se $m > 0$ mi va bene
quindi $x < 0$

$$\text{se } m < 0 \quad \frac{1}{x} < m \quad 1 > mx$$

$$\frac{1}{m} < x < 0 \quad 0 > x > \frac{1}{m} =: -\delta$$

