

Lezione del 23 Ottobre

Es. su verifica di limiti

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2)^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \begin{array}{l} x_0 = -\infty \\ U = (-\infty, K) \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty \quad (\text{ovvero: } x < 0)$$

Teo. di unicità del limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ è limitata in un intorno di } x_0$$



Teo. permanenza segno a) $l > 0 \Rightarrow f > 0$ in un intorno di x_0
($l < 0 \Rightarrow f < 0$)

b) $f > 0 \Rightarrow l \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

Teorema 0 operazioni sui limiti (finiti)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

$$l_1, l_2 \in \mathbb{R}$$

Allora

$$x_0 \in \mathbb{R}^*$$

1) $c \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c l_1$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$

4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (\text{se } l_2 \neq 0)$

5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2} \quad (\text{se } l_2 \neq 0)$

Dim. (no) nfe con la def. di lte.

es. sapendo che $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = \lim_{x \rightarrow -1} x \cdot x = (-1)(-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 5x = 5(-1) = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

operazioni sui limiti

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^3 + 7} = \frac{1 - 3(-1) + 1}{2(-1)^3 + 7} = \frac{5}{5} = 1$$

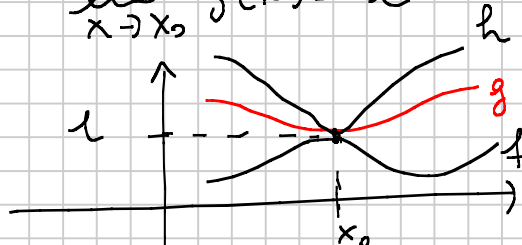
Teorema del confronto (dei "cordoncini")

$f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$
 Supponiamo che f, h di accumul. in x_0

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un intorno di x_0
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}^*$

allora anche $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ esiste e
 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

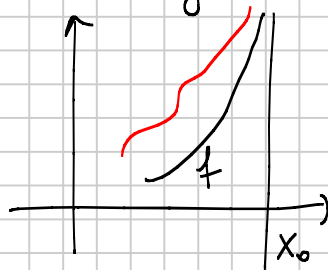
Dm. no.



oss. se $l = +\infty$ basta una funzione

- $f(x) \leq g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow +\infty$

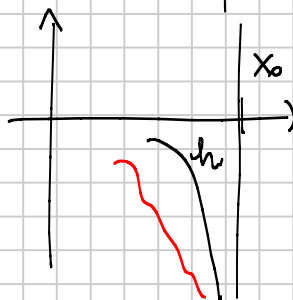
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$



analog. se $l = -\infty$

- $g(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$$



oss. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = 0$

Il principio del confronto si applica

si vuole calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

$$|g(x)| \leq \underbrace{h(x)}_{\substack{\downarrow x \rightarrow x_0 \\ 0}}$$

↓ significa

$$-h(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

↓ ↓ ↓

0 $x \rightarrow x_0$ 0

per il teo. del confronto.

es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$\frac{\sin x}{x} = g(x)$

$|\frac{\sin x}{x}| \leq \frac{1}{x}$

$|\sin x| \leq 1$
 $x \rightarrow +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ per il teo. del confronto

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

es. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

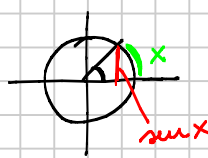
$|\sin x| \leq |x|$

↓ ↓

0 $\sin x \rightarrow 0$

↓ ↓

0 $\sin x \rightarrow 0$



es. $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l > 0$

$\Leftrightarrow g(x) > \frac{l}{2}$ (in un intorno di x_0)

$f(x) \cdot g(x) > f(x) \cdot \frac{l}{2}$

↓

$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_0$

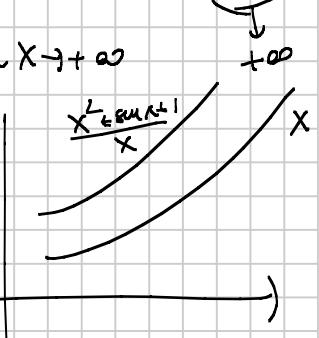
es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x + 1}{x}$

$\sin x \geq -1$

$\frac{x^2 + \sin x + 1}{x} \geq \frac{x^2 - 1 + 1}{x} = \frac{x^2}{x} = x$

↓

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x + 1}{x} = +\infty$



Aritmetizzazione formale di $\mathbb{R}^*$

Il teorema sulle operazioni con limiti
finiti si può estendere ad alcuni casi:

Teorema $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 p.h. di accumulazione in X .

1) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ $\begin{pmatrix} -\infty \\ g(x) \geq M \end{pmatrix}$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq M$ $\begin{pmatrix} -\infty \\ g \leq M \end{pmatrix}$

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = +\infty$ $\begin{pmatrix} -\infty \end{pmatrix}$

2) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $g \geq M > 0$
 $\begin{pmatrix} g \leq M < 0 \end{pmatrix}$

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$
 $\begin{pmatrix} -\infty \end{pmatrix}$

3) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ $g \geq M > 0$

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = -\infty$ $\begin{pmatrix} g \leq M < 0 \\ +\infty \end{pmatrix}$

4) Prodotto di una f. infinitesima per una limitata.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (cioè si dice che f
è infinitesima)
 g limitata

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

5) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e se $f(x) > 0$ in
un intorno di x_0 ($f(x) < 0 \dots$)

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
 $\begin{pmatrix} -\infty \end{pmatrix}$

6) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Risommario

1) $\begin{matrix} +\infty + l = +\infty \\ +\infty + \infty = +\infty \\ -\infty + l = -\infty \\ -\infty + (-\infty) = -\infty \end{matrix}$

2) $\begin{matrix} (+\infty) \cdot l = +\infty & l > 0 \\ (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \\ (+\infty) \cdot l = -\infty & l < 0 \\ (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \end{matrix}$

3) $\begin{matrix} (-\infty) \cdot l = -\infty & l > 0 \\ (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty \\ (-\infty) \cdot l = +\infty & l < 0 \\ (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \end{matrix}$

$$5) \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$6) \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

$$4) 0 \cdot l = 0$$

Con limiti fuori della aritmetica =
zione partiale

$$+\infty + (-\infty)$$

$$-\infty + (+\infty)$$

$$+\infty \cdot 0$$

$$-\infty \cdot 0$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

forme "indeterminate"
non si possono
applicare i teoremi
sulle operazioni
sui limiti ma
bisogna studiarle
caso per caso.

Esempi del teorema sulla aritmetizzazione
partiale

es. 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^3}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} + \cos(3x) = +\infty$
 $x^3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad (+\infty)(+\infty)(+\infty)$

es. 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{-x^2 + \sin^2 x}_{\substack{\downarrow \\ p.3)} = -\infty$

es. 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x^3}{x^4 + 6x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(3+x)}{\cancel{x^4}(1+6x^3)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+x}{x^3(1+6x^3)} \quad x^3(1+6x^3) > 0 \text{ vicino a } x=0$

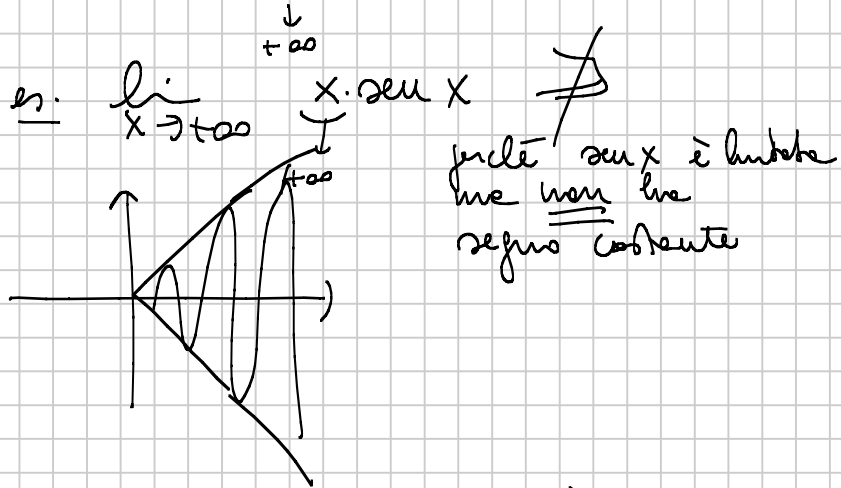
$\frac{3}{0^+} \rightarrow +\infty$

es. 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\downarrow 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{limitato}} = 0$

$x \rightarrow 0 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

es. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \alpha > 0$

es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{\downarrow} \underbrace{(2 + \sin x)}_{\nexists \text{ limite ma } 2 + \sin x > 0} = +\infty$



es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 8 \right) = -\infty$

$\frac{1}{x} \rightarrow 0$ as $x \rightarrow +\infty$

Diagram showing the limit process: $x \rightarrow +\infty$ leads to $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, which leads to $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 1$, and finally $1 - 8 = -7$.

es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x \sin x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \neq$ e $x \sin x$ non è limitata
ciò non vale caso 1

$$x^2 + x \sin x = x^2 \left(1 + \frac{x \sin x}{x^2} \right)$$

$$= x^2 \left(1 + \underbrace{\sin x \cdot \frac{1}{x}}_{\text{limitata} \rightarrow 0} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Diagram showing the limit process: $x^2 \rightarrow +\infty$ and the term in parentheses approaches 1, leading to the final result $+\infty$.