

Lezione del 25 novembre

Sei serie numeriche
Integrali
Funzioni in + variabili

} Anni passati
Analisi Matem. 2
(Moodle 2013/2014
Prof. Vittone
ESAMI passati
RISOLTI)

Sei serie numeriche

$\{a_k\}$ successione

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k := \lim_n S_n \quad \text{dove}$$

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

successione
delle
somme
parziali

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \bar{x} \quad \begin{cases} \text{CONVERGENTE a } s & \text{se } \exists \text{ finito } \lim_n S_n = s \quad (\text{somme ridotte}) \\ \text{DIVERGENTE} & \text{se } \lim_n S_n = \pm\infty \\ \text{IRREGOLARE} & \text{se } \nexists \lim_n S_n \end{cases}$$

Es. Serie geometrica di ragione q

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \quad \text{di questa serie riusciamo a calcolare } S_n$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad q \neq 1$$

$$S_n = n + 1 \quad q = 1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_n S_n = \begin{cases} \text{converge a } \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \text{diverge a } +\infty & q \geq 1 \\ \text{irregolare} & q \leq -1 \end{cases}$$

Pb. "Quon man" ni riesce a scrivere
 S_n esplicitamente e quindi
 "quon mei" ni riesce a fare
 $\lim_n S_n$.

es. Serie armonica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$S_n = ?$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} =$$

$$S_3 = \frac{11}{6}$$

$$= \frac{11}{6}$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22+3}{12} = \frac{25}{12}$$

⋮

Non si riesce a calcolare la formula
 per trovare S_n al variare di n

Dobbiamo trovare dei criteri che
 ci garantiscano che una serie
 converge o no, senza conoscere
 S_n esplicitamente.

es. di serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$

serie armonica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

serie armonica
generalizzata

$$\text{es. } \alpha = 2 \quad \sum \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \sum \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sin k = \sin 0 + \sin 1 + \sin 2 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\log k}$$

non si riesce
a calcolare
 S_n

Condizione necessaria di convergenza di una serie

Teorema

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è convergente $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

Dim.

Hp. $\sum a_k$ convergente

Ts. $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

$\sum a_k$ è convergente $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$
(S_n successione somme parziali) S è finito

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + a_n \\ &= \underbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 S S

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 S S

$$\lim_n a_n = \lim_n S_n - \lim_n S_{n-1} = S - S = 0$$

#

Oss. $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0 \not\Rightarrow \sum a_k$ converge

cioè $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$ non è una condizione sufficiente per la conv. di una serie
ma solo una condizione necessaria

es. Si può far vedere che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \quad \text{non converge ma} \quad \lim_k a_k = \lim_k \frac{1}{k} = 0$$

a_k

Teo. $\sum a_k$ converge $\Rightarrow \lim_k a_k = 0$
sufficiente anche se

se $\lim_k a_k \neq 0 \Rightarrow \sum a_k$ non converge

es. $\sum_{k=0}^{+\infty} \sin(k)$ converge?

a_k

vediamo subito se è verificata la condizione necessaria di conv. di una serie

$$\lim_k a_k = \lim_k \sin(k) \neq 0$$

(quindi $\neq 0$)

$\Rightarrow \sum \sin(k)$ non converge

es. $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$

a_k

$$\lim_k (-1)^k \neq 0 \Rightarrow \sum (-1)^k \text{ non converge}$$

es. $\sum 3^k$

a_k

$$\lim_k 3^k = +\infty$$

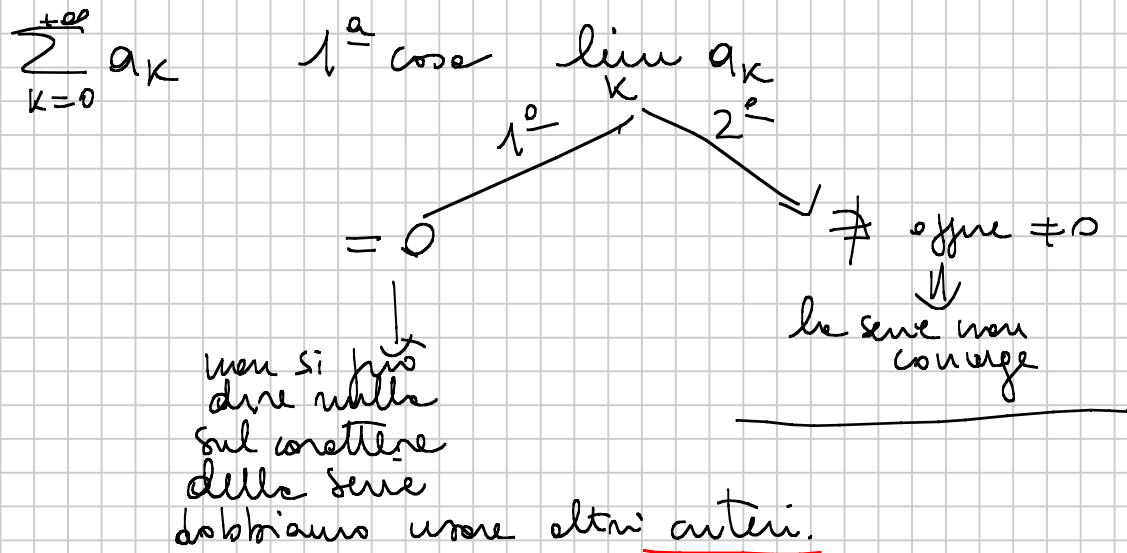
$\sum a^k \quad a=3$
 $\Rightarrow \sum 3^k$ non converge.

es. $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{1/k}$

$$\lim_k 2^{1/k} = 1 \neq 0$$

non vale la condizione necessaria di conv. di una serie $\Rightarrow$

la serie non converge



Serie a termini positivi

es. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$

$a_k = \frac{1}{k} > 0$ termini
di una serie

$\sum \frac{1}{k^2}$

termini positivi

$a_k = \frac{1}{k^2} > 0$

$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$

$a_k = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ -1 & k \text{ dispari} \end{cases}$
 non è a termini positivi

$\sum \sin(k)$

a_k cambia segno

$\sum (\sin k)^2$

$a_k \geq 0$

$\sum \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

$a_k > 0$

Teorema

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, $a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Allora

tale serie non può mai essere irregolare.
 (cioè o è convergente o è divergente)

Dim.

S_m

successione delle
somme parziali

$S_{m+1} = S_m + \frac{a_{m+1}}{\geq 0} \geq S_m$

quindi S_n è una successione
monotona crescente. $\Rightarrow$ per il teorema del
limite delle success.
monotone

$\Rightarrow \lim_n S_n \exists$ sempre finito o infinito

la serie
converge

la serie
diverge.

non può mai succedere che
 $\lim_n S_n \nexists$ e quindi non può
mai succedere $\sum a_k$ né convergere. $\nexists$

es. $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{1/k} \cdot 2^{1/k} > 0$

serie a termini positivi

$\lim_{k \rightarrow +\infty} 2^{1/k} = 1 \Rightarrow$ non converge ed essendo
a termini positivi $\sum 2^{1/k}$ DIVERGE.

$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{1/k} = +\infty$

es. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+1}$

$a_k \geq 0$
 $\lim_k a_k = 1 \neq 0 \Rightarrow$ la serie
diverge.

CARATTERE DELLA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

$\alpha \geq 0$

È CONVERGENTE
se $\alpha > 1$

È DIVERGENTE
se $0 \leq \alpha \leq 1$

es. 1) $\sum \frac{1}{k}$

serie armonica
 $\alpha = 1$ divergente

2) $\sum \frac{1}{k^2}$

serie armonica generalizz.
con $\alpha = 2$

$$3) \sum \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$d = \frac{1}{2}$$

convergente
serie
divergente

$$1) a_k = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$2) a_k = \frac{1}{k^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$3) a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

In tutti e 3 i
caso
verificare la
condizione
necessaria di
conv.

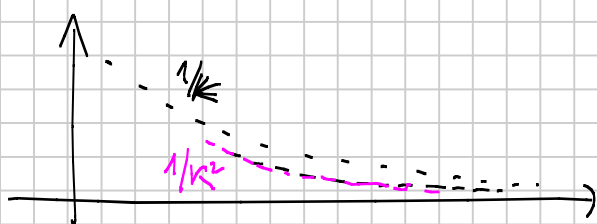
ma la serie
 $\sum \frac{1}{k}$ e $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$
divergono e
 $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = +\infty \quad \text{non converge}$$

$$\sum \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \text{numero finito}$$

perché $\sum \frac{1}{k}$ diverge e $\sum \frac{1}{k^2}$ converge?

Tutto sta nella "velocità di convergenza" di a_k



$$a_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0$$

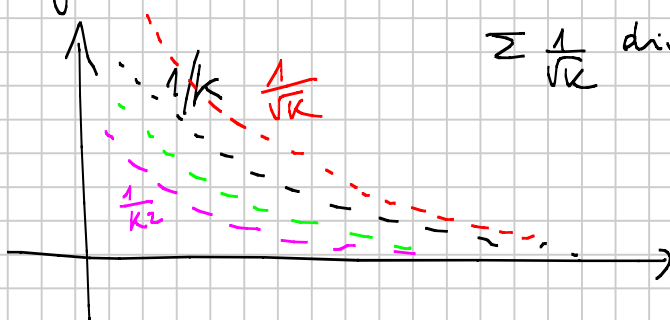
$$a_k = \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$$

controllare l'ordine di infinitesimo

$a_k = \frac{1}{k^2}$ va più velocemente a zero di

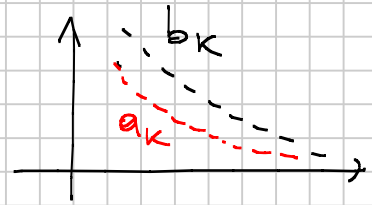
$$a_k = \frac{1}{k}$$

$\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge.



CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI POSITIVI

Criterio del confronto



Teorema $0 \leq a_k \leq b_k$

se $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge

se $\sum a_k$ diverge $\Rightarrow \sum b_k$ diverge $(+\infty)$

Dim. no.

oss. Non convergono allo stesso valore.

es. 1 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sin k)^2}{k^2}$ $a_k \geq 0$

vediamo se $\lim_k \frac{(\sin k)^2}{k^2} = 0$ sì!

$$(\sin k)^2 \leq 1$$

$$a_k = \frac{(\sin k)^2}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} = b_k$$

il criterio del confronto un dice che
se $\sum b_k$ conv. $\Rightarrow \sum a_k$ converge.

$$\sum \frac{1}{k^2} \text{ conv. } \Rightarrow \sum \frac{(\sin k)^2}{k^2} \text{ converge}$$

serie armonica generalizzata con $d=2 > 1$

CONVERGE

oss. Non avremmo potuto applicare il criterio se avessimo avuto

$$\sum \frac{\sin k}{k^2}$$

perché a_k non è a termini positivi

es. $\sum \frac{(\cos k + 2)^2}{\sqrt{k}}$ b_k

$$b_k \geq 0 \quad \lim_k b_k = 0$$

$$\cos k + 2 \geq 1$$

$$(\cos k + 2)^2 \geq 1$$

$$b_k = \frac{(\cos k + 2)^2}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}} = a_k$$

$$\text{ma } \sum \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ diverge} \Rightarrow \sum b_k = \sum \frac{(\cos k + 2)^2}{\sqrt{k}} \text{ diverge.}$$

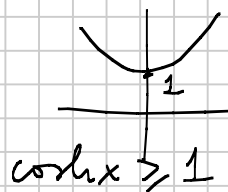
Esercizi grafici di funzioni

$$f(x) = \log(2 \cosh x) + x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f(x) = \log(e^x + e^{-x}) + x$$

$D = \mathbb{R}$, no simmetrie



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Vediamo se ci sono asintoti obliqui per $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \log(e^x + e^{-x}) + 1$$

$$\frac{\log(e^x + e^{-x})}{x} = \frac{\log(e^x(1 + e^{-2x}))}{x} =$$

$$= \frac{\log e^x + \log(1 + e^{-2x})}{x} = \frac{x}{x} + \frac{\log(1 + e^{-2x})}{x}$$

$$= 1 + \frac{\log(1 + e^{-2x})}{x}$$

$\rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty$

Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^x + e^{-x})}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^x + e^{-x})}{x} + 1 = 2$

$\frac{f(x)}{x} \rightarrow \frac{2}{x \rightarrow +\infty} = m$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(e^x + e^{-x}) + x - 2x$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cancel{x} + \log(1 + e^{-2x}) - \cancel{x}$

semple
algebraici di
segno

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1 + e^{-2x}) = 0 = q$

$y = 2x$ è asintoto obliquo per $f(x)$
quando $x \rightarrow +\infty$

oss. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^x + e^{-x})}{x}$ in più fare anche
con el. $\neq 3$ f. cal
(fate voi).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(e^x + e^{-x}) + x = \text{forma indet.}$
 $+\infty - \infty$

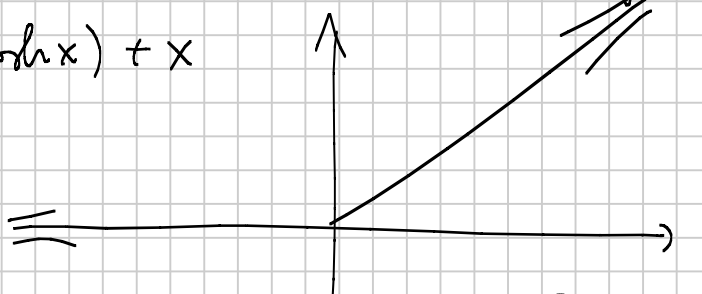
$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(e^{-x} (e^{2x} + 1)) + x =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(e^{-x}) + \log(1 + e^{2x}) + x$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \cancel{-x} + \log(1 + e^{2x}) + \cancel{x} = 0$

$y = 0$ è asintoto orizzontale per $f(x)$
quando $x \rightarrow -\infty$

$f(x) = \log(2 \cosh x) + x$



Continuità e derivabilità di f su tutto $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cosh x} \cdot 2 \cdot \sinh x + 1 =$$

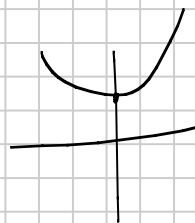
$$= \frac{\sinh x}{\cosh x} + 1$$

$$f'(x) > 0 \quad ?$$

$$f'(x) = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} + 1 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 1 = \frac{e^x - e^{-x} + e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.



$$f'(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} + 1$$

$$f''(x) = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} =$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ è strettamente convessa su $\mathbb{R}$.



$f(0) = \log 2$. In particolare si scopre che:

$$f(x) = \log(2 \cosh x) + x > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

Es.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x \leq 0 \\ \frac{3x^2}{x^3 + x} & x > 0 \\ e & \end{cases}$$

det. $a, b \in \mathbb{R}$ b.c.

1) f continue su $\mathbb{R}$

2) f derivabile su $\mathbb{R}$.

1) $x < 0$ continue
 $x > 0$ continue



$$f(0) = b = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{3x^2}{x^3+x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2}{x(x^2+1)} = 0$$

f è continue in $x=0 \Leftrightarrow \boxed{b=1}$

1) f è continue in $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \\ b=1 \\ \forall a \in \mathbb{R} \end{matrix}$

2) $b=1$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x \leq 0 \\ \frac{3x^2}{x^3+x} & x > 0 \\ e & \end{cases}$$

derivabile $\forall x \neq 0$.

$x < 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 0 \\ \frac{3x^2}{x^3+x} \cdot \frac{6x(x^3+x) - 3x^2(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{3x^2}{x^3+x}} \cdot \frac{6x^4 + 6x^2 - 9x^4 - 3x^2}{(x^3+x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{3x^2}{x^3+x}} \cdot \frac{3x^2 - 3x^4}{(x^3+x)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(1)} \cdot \frac{x^2(3-3x^2)}{x^2(x^2+1)^2} = 3$$

$\Rightarrow f$ non è derivabile in $x=0$!
infatti.

$$f'_+(0) = 3$$

$$f'_-(0) = 0$$