

Lezione del 26 novembre

• $\{a_k\}$ $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ a_k termini della serie

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

successione
somme parziali

• $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim S_n =$ Somma della serie

$\sum a_k$ $\begin{cases} \text{convergente} & \exists \text{ finito } \lim S_n \\ \text{divergente} & \exists \pm \infty \text{ " } \\ \text{neppure} & \nexists \text{ " } \end{cases}$

• $\sum a^k$ serie geometrica converge $\Leftrightarrow |a| < 1$

• se $\sum a_k$ converge $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

es. $\sum \frac{1}{k}$ $a_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0$ $\xrightarrow{k \rightarrow +\infty}$

ma $\sum \frac{1}{k}$ diverge.

$\sum \frac{1}{k^\alpha}$ serie armonica generalizzata converge se $\alpha > 1$
diverge se $0 < \alpha < 1$

serie a termini positivi $\sum a_k$, $a_k \geq 0$

oss. Basta che siano positivi da un certo K in poi.

$\sum \frac{k^2 - 10k}{k^4 + 1}$

$a_k = \frac{k^2 - 10k}{k^4 + 1} \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$k(k-10) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq 10$

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9}_{\text{finita}} + \sum_{k=10}^{+\infty} a_k$

↓
numero

↓
si studia-
queste serie!
e questa
è tale che $a_k \geq 0$.

Quando si dice che a_k hanno una
certa proprietà intendendo che tale proprietà
valge da un K in poi.
 $(\forall K > K_0)$
 $\equiv$

- 1^a proprietà
 $\sum a_k, a_k \geq 0$ non è mai negativa.

• Criterio del confronto

$$0 \leq a_k \leq b_k$$

$$\sum b_k \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_k \text{ conv.}$$

$$\sum a_k \text{ div.} \Rightarrow \sum b_k \text{ div.}$$

(non è da facile applicazione).

Criterio del confronto asintotico

$$a_k, b_k \geq 0, \text{ se } a_k \sim b_k \quad k \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ e } \sum b_k \text{ hanno lo stesso carattere.}$$

oss. $a_k \sim b_k, k \rightarrow +\infty$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$$

Possibile deve essere verificata la condizione
necessaria di convergenza

$$a_k, b_k \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$$

$$a_k \sim b_k \Leftrightarrow a_k = b_k + o(b_k) \quad k \rightarrow +\infty$$



$$x \rightarrow 0 \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad x \rightarrow 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} \quad x \rightarrow 0$$

$k \rightarrow +\infty$

$$\sin\left(\frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{k} - \frac{1}{3!k^3} \quad k \rightarrow +\infty$$

$$x = \frac{1}{k} \quad k \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow 0$$

$\sin k$ $k \rightarrow +\infty$ no Taylor! perché $k \rightarrow +\infty$

$\sin\left(\frac{1}{k} + 1\right)$ no Taylor perché $\frac{1}{k} + 1 \rightarrow 1$ $k \rightarrow +\infty$

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\log(1+x) \quad x \rightarrow 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad k \rightarrow +\infty$$

$\log\left(\frac{1}{k}\right)$ no Taylor!

Come si applica il criterio di confronto asintotico

es. $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

$$a_k = \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

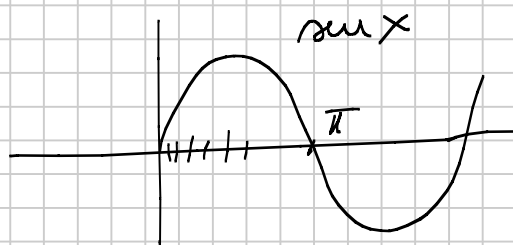
$$\lim_k \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) = 0$$

è soddisfatta la condizione necessaria

$$a_k = \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$k \text{ grande } 0 < \frac{1}{k^2} < \pi$$

$$\sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \geq 0$$



Quindi $\sum \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$ è a termini positivi

$$\sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{1}{k^2} \quad k \rightarrow +\infty$$

$$\sin x \sim x \quad x \rightarrow 0 \quad \left(\sin x = x + o(x) \right)_{x \rightarrow 0}$$

$$\sum \sin \frac{1}{k^2} \sim \sum \frac{1}{k^2} \quad \text{hanno lo stesso carattere.}$$

perché $\sum \frac{1}{k^2}$ conv. $\Rightarrow \sum \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$ converge.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1 \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[- \left(1 - \cos \frac{1}{k} \right) \right] = - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{k} \right)$$

Quindi i criteri si possono applicare anche alle serie a termini tutti negativi

Invece se si ha $\sum (-1)^k \frac{1}{k}$

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$$

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4}$$

questo ha i termini di segno variabile

(non si possono applicare i criteri delle serie a termini positivi)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\cos \frac{1}{k} - 1 \right) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{k} \right)$$

$$a_k = 1 - \cos \frac{1}{k}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\Downarrow \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} \quad x \rightarrow 0$$

$$\cos \frac{1}{k} \sim 1 - \frac{1}{2k^2} \quad k \rightarrow +\infty$$

$$a_k = 1 - \cos \frac{1}{k} \sim \frac{1}{2k^2} \quad k \rightarrow +\infty$$

confronto asintotico

$$\sum 1 - \cos \frac{1}{k} \text{ converge se } \sum \frac{1}{2k^2} \text{ conv.}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{k^2}$$

converge

$$\Rightarrow \sum \left(1 - \cos \frac{1}{k}\right) \text{ converge}$$

$$\Downarrow \sum \left(\cos \frac{1}{k} - 1\right) \text{ converge.}$$

es. $\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$a_n = \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$$

$n \rightarrow +\infty$

$$\log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$a_n \geq 0$$

siccome $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$$\Rightarrow \sum \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ diverge.}$$

es. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

$$a_n \rightarrow 0$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad n \rightarrow +\infty$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

non basta lo sviluppo al 1° ordine di $\log(1+x)$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$a_n \sim \frac{1}{2n^2}$$

$$\sum a_n = \sum \left(\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \text{ converge} \\ \text{perché } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

oss. $\sum a_k, \sum b_k$ convergenti c_1, c_2 costanti

$$\sum (c_1 a_k + c_2 b_k) \text{ converge}$$

$$= c_1 \sum a_k + c_2 \sum b_k$$

$$\text{es. } \sum \left(\frac{3}{k^5} + 5\left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = 3 \underbrace{\sum \frac{1}{k^5}}_{\text{converge}} + 5 \underbrace{\sum \left(\frac{2}{3}\right)^k}_{\text{converge}}$$

$\Rightarrow$  Converge!

Altro criterio per le serie a termini positivi

CRITERIO DEL RAPPORTO

$$a_k \geq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = l$$

$$l < 1$$

$\sum a_k$
converge

$$l > 1$$

$\sum a_k$
diverge

$$l = 1$$

non si può dire nulla.

Es.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$a_k \rightarrow 0$$

$$a_k = \frac{1}{k!}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(k+1)!} \cdot k! = \frac{k!}{k!(k+1)} \rightarrow 0$$

$$l = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ per il criterio del rapporto
 $\sum \frac{1}{k!}$ converge.

es. $\sum \frac{n!}{n^n}$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$$

scalo degli infiniti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$= \frac{n! (n+1) n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n =$$

divido numeratore e denomin. per n

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

del criterio del rapporto $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

es. $\sum \frac{1}{n}$

serie armonica

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \cdot n \rightarrow 1$$

non si può dire nulla

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

prova di vari!

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$$

CRITERIO DELLA RADICE

$$a_k \geq 0 \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$$

$l < 1$
 $\sum a_k$
 converge

$l > 1$
 $\sum a_k$
 diverge

$l = 1$
 non si
 può dire
 nulla.

Es. $\sum \frac{3^n}{n^n}$ $a_n = \frac{3^n}{n^n} \rightarrow 0$
 $n \rightarrow +\infty$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{n} \rightarrow 0 < 1$$

$\sum \frac{3^n}{n^n}$ converge per il criterio della radice.

Es. $\sum 2^n \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)^n$

$$\sqrt[n]{a_n} = 2 \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right) \rightarrow 2 > 1$$

$\sum 2^n \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)^n$ diverge

Es. $\sum \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n^2}$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{5}{2}} = \left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{5}{2}} \\ &\quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \quad \downarrow \quad \left[\frac{1}{e}\right]^{5/2} < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

Es.

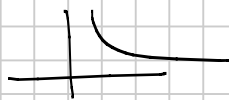
1) Calcolare $\lim_n \frac{e^n + 3^n + n^3}{\log n + 2^n + 2^{2n} + \sin n}$

2) Dire se $\sum \frac{e^n + 3^n + n^3}{\log n + 2^n + 2^{2n} + \sin n}$ converge

1)
$$\frac{3^n \left(\left(\frac{e}{3} \right)^n + 1 + \frac{n^3}{3^n} \right)}{4^n \left(\frac{\log n}{4^n} + \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1 + \frac{\sin n}{4^n} \right)} =$$

$$a_n = \left(\frac{3}{4} \right)^n \frac{(1 + \dots)}{(1 + \dots)} \rightarrow 0$$

successione geometrica $q^n \rightarrow 0$ se $|q| < 1$



$a^x \rightarrow 0$ se $a < 1$

$\left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$

2) $\sum a_n$ dal punto 1)

$a_n \sim \left(\frac{3}{4} \right)^n$ $n \rightarrow +\infty$

$\sum a_n$ conv. $\Leftrightarrow \sum \left(\frac{3}{4} \right)^n$ conv.

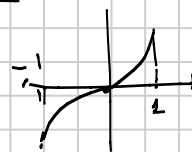
serie geometrica
con ragione
 $|q| < 1$

converge

$\sum a_n$ converge.

ESERCIZI SU FUNZIONI

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{|x-1|}{x+3}\right)$$



$$D = \left\{ x : -1 \leq \frac{|x-1|}{x+3} \leq 1, x \neq -3 \right\}$$

$$\left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 1$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+3} \leq 1 & \Leftrightarrow x > -3 \\ \frac{x-1}{x+3} \geq -1 & \Leftrightarrow \begin{matrix} x > -1 \\ \text{(tenendo conto)} \\ x > -3 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x+3} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x-1 - x-3}{x+3} \leq 0$$

$$\frac{-4}{x+3} \leq 0$$

$$\frac{4}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow x > -3$$

$$\frac{x-1}{x+3} + 1 \geq 0$$

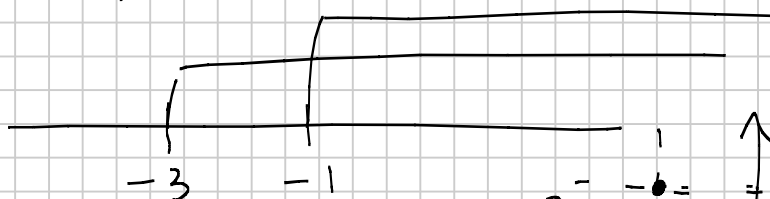
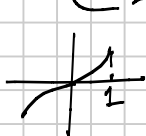
$$\frac{x-1 + x+3}{x+3} \geq 0$$

$$\frac{2x+2}{x+3} \geq 0$$

$$\frac{2(x+1)}{x+3} \geq 0$$

(dalla 1^a di seq.)

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$



$$D = \{ x \in \mathbb{R}, x \geq -1 \}$$

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{|x-1|}{x+3}\right)$$

$$f(-1) = \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin\left(\frac{|x-1|}{x+3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(per $x > 1$ per cui $x \rightarrow +\infty$)

$y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right) & x \geq 1 \\ \arcsin\left(\frac{1-x}{x+3}\right) & x < 1 \end{cases}$$

è continua in D.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2}} \cdot \frac{(x+3) - (x-1)}{(x+3)^2}, & x > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{x+3}\right)^2}} \cdot \frac{-(x+3) - (1-x)}{(x+3)^2}, & x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2}} \cdot \frac{4}{(x+3)^2}, & x > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{x+3}\right)^2}} \cdot \frac{-4}{(x+3)^2}, & x < 1 \end{cases}$$

in $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f' = \frac{1}{4}$$

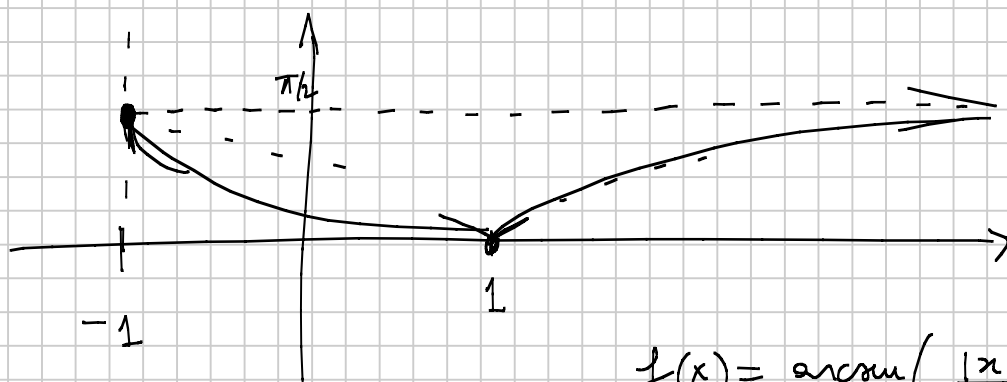
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f' = -\frac{1}{4}$$

f non è derivabile
in $x=1$

e $x=1$ è un punto
angolare.

Dall'espressione di f'

se $x > 1$ $f' > 0 \Rightarrow f$ è strett. crescente
se $x < 1$ $f' < 0 \Rightarrow$ // // decresc.



$$f(1) = 0$$

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$$

Studiamo $f''(x)$ per $x > 1$

$$x > 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2}} \cdot \frac{4}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(x+3)^2 - (x-1)^2}{(x+3)^2}}} \cdot \frac{4}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + 9 + 6x - x^2 - 1 + 2x}{(x+3)^2}}} \cdot \frac{4}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{4}{(x+3) \cdot \sqrt{8 + 8x}} =$$

$$= \frac{4^{\cancel{2}}}{(x+3) \cancel{2} \sqrt{2} \sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{2}}{(x+3) \sqrt{1+x}}$$

$$= f'(x) \quad x > 1$$

$$f''(x) =$$

$$\left[(x+3) \sqrt{1+x} \right]^{-1}$$

$$= \sqrt{2} \left[\frac{-1}{[(x+3) \sqrt{1+x}]^2} \cdot \left(\sqrt{1+x} + (x+3) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) \right]$$

$$x > 1$$

$$\Rightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x > 1$$

f è concava $\forall x > 1$

$$\text{Siccome per } x < 1 \quad f' = -f'_{\text{per } x > 1}$$

$$f''(x) > 0 \quad \forall x < 1$$

Per conoscere l'attacco in $x = -1$ calcoliamo $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x)$

$$\left(R. \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -\infty \right)$$