

Lezione del 27 Ottobre

Usando le operazioni sui limiti
(ha per limiti finiti che infiniti)
si possono calcolare immediatamente
alcuni limiti.

Forme indeterminate

• $(+\infty) - (+\infty) = ?$

• $(-\infty) + (+\infty) = ?$

• $(-\infty) - (-\infty) = ?$

• $\pm\infty \cdot 0 = ?$

• $\frac{0}{0} = ?$

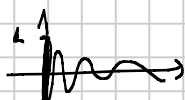
• $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$

es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5}{3x + 8}$ dopo primo
esempio

$\nearrow +\infty$
 $\searrow +\infty$

oss. in generale può non esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \nexists$

$\Rightarrow$ non sono monotone

Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone

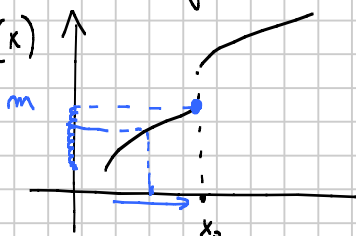
- $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente
- 1) x_0 p.to di accumulazione per X destro

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x)$



- 2) x_0 p.to di accumulazione sinistro per X

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x)$



oss. vale il viceversa se $f(x)$ è monotona decrescente.

Conseguenze

limiti delle potenze

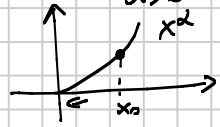
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^a = x_0^a$

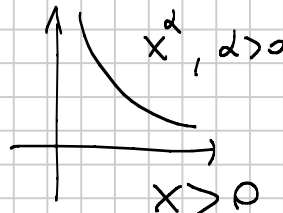
$f(x) = x^a$
 $X = \mathbb{R}^+$

$a > 0$

$a \in \mathbb{R}$
 $a > 0$



$$\begin{aligned}
 & - \lim_{x \rightarrow 0^+} x^d = 0 \\
 & - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^d = 0 \\
 & - \lim_{x \rightarrow x_0} x^d = x_0^d \\
 & - \lim_{x \rightarrow 0^+} x^d = +\infty
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} & - \lim_{x \rightarrow 0^+} x^d = 0 \\ & - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^d = 0 \\ & - \lim_{x \rightarrow x_0} x^d = x_0^d \\ & - \lim_{x \rightarrow 0^+} x^d = +\infty \end{aligned}} \right\} d < 0$$



diremo che $f(x) = x^d$ è continua in ogni $x_0 > 0$

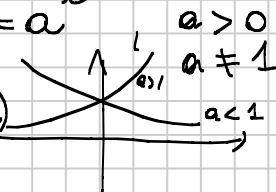
Def. $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in X$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

funzioni esponenziali $f(x) = a^x$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \quad (\text{continua})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

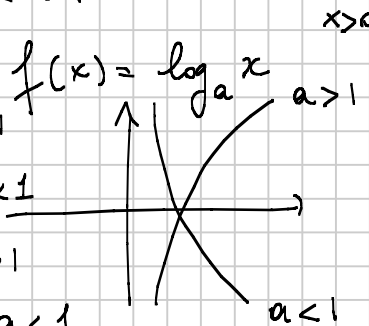
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$



funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ -\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad (f. \text{ continua } \forall x_0 > 0)$$

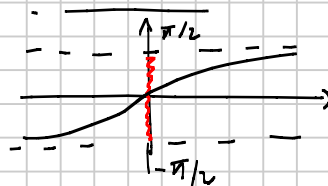
$$f(x) = \arctan x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Im } f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

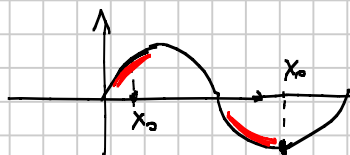


$$f(x) = \sin x$$

In un intorno di x_0 la funzione è monotona

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad (\text{non vale se } x_0 = \pm\infty)$$

continua in $x_0 \in \mathbb{R}$



analog. $\cos x$ e $\frac{1}{x}$.

Esempi per calcolare forme indeterminate

es. Limiti di polinomi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 5 = +\infty + (-\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)$$

$= +\infty$

In generale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \dots + a_n \right)$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0 \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

es. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^5 + 3x^2 - 8x + 1$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(-3 + \frac{3}{x^3} - \frac{8}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right)$$

$= +\infty$

Es. Limiti di funzioni razionali

= quozienti di polinomi

es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^5-2x^3+5} = \frac{+\infty}{+\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)}{x^5 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)} = 0$$

In generale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \quad a_n, b_m \neq 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \dots + a_n \right)}{x^m \left(\frac{b_0}{x^m} + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_2}{x^{m-2}} + \dots + b_m \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} \frac{(\rightarrow a_n)}{(\rightarrow b_m)} =$$

$$= \begin{cases} (+\infty) \left(\frac{a_n}{b_m} \right) & n > m \quad \left(\begin{array}{l} \text{quindi } +\infty \\ \text{se } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty \\ \text{se } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{array} \right) \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

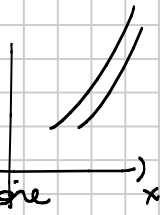
es. precedente $\frac{x-2}{x^5-2x^3+5} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ $\begin{matrix} n=1 \\ m=5 \end{matrix}$

$x-2 \rightarrow +\infty$ (è un infinito $\frac{\infty}{\infty}$) $x \rightarrow +\infty$

$x^5-2x^3+5 \rightarrow +\infty$ (- - -)

ma $\frac{x-2}{x^5-2x^3+5} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Quindi x^5-2x^3+5 è un infinito di ordine superiore di $x-2$ (cioè va "più velocemente" a ∞ di $x-2$)



es. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-5}{2-2x^2+x} = \frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(3 - \frac{5}{x^2} \right)}{\cancel{x^2} \left(\frac{2}{x^2} - 2 + \frac{1}{x} \right)} = -\frac{3}{2}$$

$3x^2-5$ è infinito $x \rightarrow \pm\infty$

$2-2x^2+x$ " " " "

e sono infiniti dello stesso ordine

facile $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2-5}{2-2x^2+x} = -\frac{3}{2} \neq \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$

(vanno a $\pm\infty$ con la "stessa velocità")

es. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7+3x-8}{2-5x^2+3x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^7} \left(1 + \frac{3}{x^6} - \frac{8}{x^7} \right)}{\cancel{x^2} \left(\frac{2}{x^2} - 5 + \frac{3}{x} \right)} = +\infty$$

x^7+3x-8 è infinito di ordine superiore rispetto a $2-5x^2+3x$, per $x \rightarrow \infty$

Teorema del limite della funzione composta

$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\text{Im } f \subseteq Y$
 x_0 p.t. di accumulazione per X in $\mathbb{R}^*$
 l p.t. di accumulazione per Y
 $l, k \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
 $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = k$

e g continua in l ($\lim_{y \rightarrow l} g(y) = g(l)$)

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = k$

Come si applica

Es.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{x}}$$

$x \xrightarrow{f} \frac{1}{x} \xrightarrow{g} a^{\frac{1}{x}}$
 $f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
 $g(y) = a^y \xrightarrow{y \rightarrow 0} a^0 = 1$
 $g \circ f = g(f(x)) = a^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

$\Downarrow$ per il teorema del limite della funzione composta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$$

è come se avessimo fatto un cambio di variabile

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} a^y = 1$$

$\frac{1}{x} = y$
 $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$

es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = \sin 0 = 0$

$\frac{1}{x} = y$ e $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$

Sostituzione importante

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$y = e^{\log y}$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \log f(x)}$$

noi sono condotte a studiare il

limite di un prodotto $(g(x) \cdot \log f(x))$

per calcolare il limite di $f(x)^{g(x)}$.

es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log x^x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log x} = +\infty$$

perché $x \log x \rightarrow +\infty$

per il limite della funzione
composta.