

Lezione del 28 Ottobre

limiti del tipo $(f(x))^{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\log(f(x))^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \log f(x)}$$

Le forme indet. del tipo $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \log f(x)$

0^0 , 1^0 , ∞^0

con il "trucco" di sopra si riconducono tutte alla forma indeterminata $0 \cdot \infty$

$$0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty} = \infty \cdot \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 \cdot \infty$$

Diagram showing the transformation of indeterminate forms:

- 0^0 is transformed to $0 \cdot \infty$ via $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$.
- 1^0 is transformed to $0 \cdot \infty$ via $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$.
- ∞^0 is transformed to $0 \cdot \infty$ via $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$.

Specific cases for $0 \cdot \infty$:

- $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$
- $f(x) \rightarrow 1, g(x) \rightarrow \infty$
- $f(x) \rightarrow \pm \infty, g(x) \rightarrow 0$

Red arrows indicate the transformation of 0^0 to $0 \cdot \infty$ and 1^0 to $0 \cdot \infty$.

Quindi risolvere

0^0 equivale risolvere $0 \cdot \infty$

Provate a risolvere $1^0, \infty^0$ come $g(x) \log f(x)$

Es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log x} = +\infty$

Es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \frac{(\cancel{x^2} + 1) - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$\rightarrow 0$
 $x \rightarrow +\infty$

2° modo

$x \rightarrow +\infty \quad x > 0$

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - x$$

$$\stackrel{(x > 0)}{=} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x =$$

$$\stackrel{+\infty}{=} \underbrace{x}_{+\infty} \left(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}_0 \right) \rightarrow \infty \cdot 0$$

$$= x \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1\right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} =$$

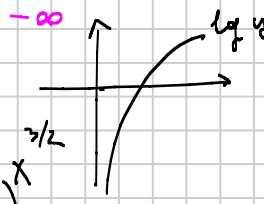
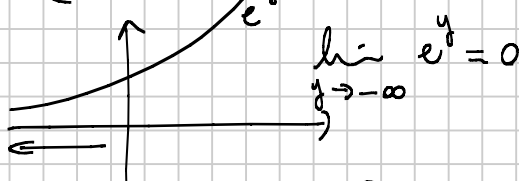
$$= x \frac{\cancel{1 + \frac{1}{x^2}} - \cancel{1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$\downarrow$
 $0 \quad \infty$
 $x \rightarrow +\infty$

Es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)^{x^{\frac{3}{2}}}$

$\downarrow 0$ (es. precedente.)

$$\left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)^{x^{\frac{3}{2}}} = e^{x^{\frac{3}{2}} \log(\sqrt{x^2 + 1} - x)}$$



Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)^{x^{\frac{3}{2}}} = 0.$

Es.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{2x^2 + 1}$$

$-\infty + (+\infty)$

$$\frac{(x + \sqrt{2x^2 + 1})(x - \sqrt{2x^2 + 1})}{x - \sqrt{2x^2 + 1}} =$$

$x \rightarrow -\infty$

$$= \frac{x^2 - (2x^2 + 1)}{x - \sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{-x^2 - 1}{x - \sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} \\
 & = -x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} \quad (x < 0)
 \end{aligned}$$

Allora il mio limite diventa:

$$\begin{aligned}
 & \frac{-x^2 - 1}{x - \sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{-x^2 - 1}{x - (-x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}})} = \\
 & = \frac{-x^2 - 1}{x + x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{x^2(-1 - \frac{1}{x^2})}{x(1 + \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}})} \\
 & \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{(-\infty)(-1)}{(1 + \sqrt{2})} \rightarrow +\infty \quad \text{Risultato}
 \end{aligned}$$

Es. Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha x - \sqrt{x^2 + 3}$$

$$\alpha = 0 \quad \lim () = -\infty$$

$$\alpha < 0 \quad \lim () = -\infty$$

$\alpha > 0$ $\infty - \infty$ forma indeterminata

$$\begin{aligned}
 & \alpha x - \sqrt{x^2 + 3} = \frac{(\alpha x - \sqrt{x^2 + 3})(\alpha x + \sqrt{x^2 + 3})}{(\alpha x + \sqrt{x^2 + 3})} \\
 & = \frac{\alpha^2 x^2 - (x^2 + 3)}{\alpha x + \sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x^2(\alpha^2 - 1) - 3}{\alpha x + x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} \quad (x > 0: \sqrt{x^2} = x) \\
 & = \frac{x^2 \left[(\alpha^2 - 1) - \frac{3}{x^2} \right]}{x \left(\alpha + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} \\
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[(\alpha^2 - 1) - \frac{3}{x^2} \right]}{\left(\alpha + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\alpha^2 - 1)}{\alpha + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\alpha - 1)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\alpha - 1) = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ -\infty & 0 < \alpha < 1 \\ 0 & \alpha = 1 \end{cases}$$

Primi limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dim. $f(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$ f.v.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

Quindi $\frac{\sin x}{x}$ è pari

se calcolo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}$

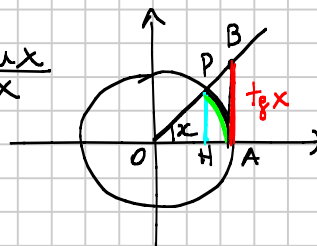
ho anche $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}$

Quindi calcolo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}$

AB

$PH = \sin x$

$\text{arco } \widehat{AP} = x$



vediamo quanto vale

Triangoli simili

$$\frac{AB}{PH} = \frac{OA}{OH}$$

$$\frac{AB}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$AB = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Quindi **AB** = $\tan x$

Geometricamente si vede che

$$PH \leq \widehat{AP} \leq AB$$

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

se divido le disuguaglianze

per $\sin x$ non cambia segno perché $\sin x > 0$ per $x > 0$ e $x \rightarrow 0^+$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$\text{cioè } x > 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x \rightarrow 0^+ \end{matrix}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 $\text{il teorema del confronto}$ 1
 $\downarrow$ $\downarrow$
 1 $x \rightarrow 0^+$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

e poiché $\frac{\sin x}{x}$ è pari $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$

e quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. #

oss. $\frac{\sin x}{x}$

$x \rightarrow 0$ $\sin x \rightarrow 0$

Def se $f(x) \rightarrow 0$ $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^+$ dico che

1) $f(x)$ è INFINITESIMA in x_0

2) $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime $\left(\begin{matrix} f(x) \rightarrow 0 \\ g(x) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0 \end{matrix} \right)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

si dice che $f(x)$ è infinitesima di ordine superiore alla $g(x)$

e si scrive

$f(x) = o(g(x))$ $x \rightarrow x_0$

"o piccolo"

Simbolo di Landau

3) $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x \rightarrow x_0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ $l \in \mathbb{R}, l \neq 0$

si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime dello stesso ordine

(cioè "vanno a zero con la stessa velocità").

es. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\sin x$ e x sono infinitesime per $x \rightarrow 0$
e sono infinitesime dello stesso ordine
 $\sin x \rightarrow 0$ con la stessa velocità
di x

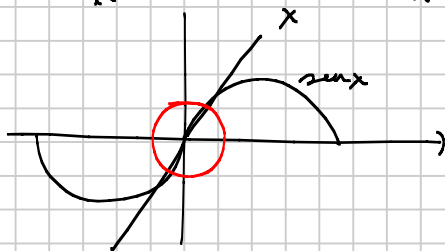
$$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) \text{ e } g(x) \text{ sono infinitesime dello stesso ordine} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

$$f(x) \text{ e } g(x) \text{ sono equivalenti} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$f(x) \sim g(x)_{x \rightarrow x_0}$$

perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \sin x \sim x_{x \rightarrow 0}$

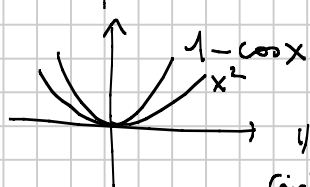
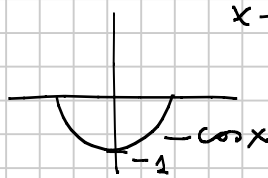


Limiti notevoli conseguenza di $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1_{x \rightarrow 0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} &= \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

Quindi $(1 - \cos x)$ e x^2 sono infinitesime dello stesso ordine, cioè vanno a zero con la stessa velocità, e dice anche $1 - \cos x$ è infinitesima di ordine 2



in $x=0$ si toccano
"bene"
ciò hanno anche
la stessa retta tangente.

oss. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
Hôpital

$$(\sin x)' = \cos x$$

↓ per dim. che la derivata del $\sin x$ è $\cos x$
 si applica
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

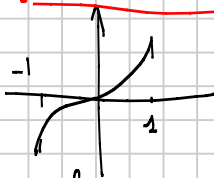
Es. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

$$\frac{1 - \cos x}{x} \cdot x = \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x \rightarrow 0$$

$1 - \cos x$ è infinitesimo per $x \rightarrow 0$
 " " " "

$1 - \cos x$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a x (cioè va a zero + velocemente)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$



$\frac{0}{0}$

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y$$

se $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

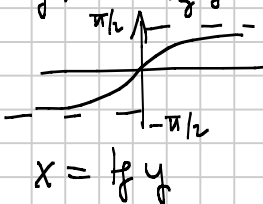
significa che $\arcsin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$
 cioè $\arcsin x$ è infinitesimo di ordine 1 per $x \rightarrow 0$.

o' $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = 1$

o. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$

$$\arctan x = y$$

$x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$



$$x = \tan y$$

$$\arctan x \sim x$$

$x \rightarrow 0$

cioè è infinitesimo di ordine 1.

P.C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x - \pi}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$$

con
 apposite
 sostituzioni

~ . ~ . ~ .

Diseguaglianze

1) Trovare il dominio di
 $f(x) = \log(1 - (x+1)^{x^2-1})$

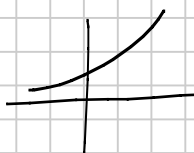
$$a^x \Leftrightarrow a > 0$$

$$\boxed{x > -1}$$

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ (x+1)^{x^2-1} < 1 \end{cases}$$

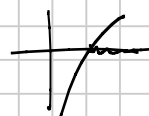
$$e^{\log((x+1)^{x^2-1})} < e^{\log 1}$$

$$e^{(x^2-1)\log(x+1)} < e^0$$



$$(x^2-1)\log(x+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ \log(x+1) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| > 1 & \text{cioè } x > 1 \text{ o } x < -1 \\ x+1 < 1 & \text{cioè } x < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} |x| < 1 & \text{cioè } -1 < x < 1 \\ x+1 > 1 & \text{cioè } x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (0, 1) \quad \underline{\text{dominio}}$$

oss.

$$\begin{array}{c} f(x) \\ \downarrow \\ e^{g(x) \log f(x)} \end{array}$$

dominio
 $x: f(x) > 0$