

Lezione del 29 Ottobre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\underbrace{g(x) \log f(x)}}_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\sin x$ e x sono infinitesime per $x \rightarrow 0$ dello stesso ordine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\sin x \sim x$ $x \rightarrow 0$
 $1 - \cos x$ è infinitesima dello stesso ordine di x^2

limiti notevoli per funzioni infinite

potenze x^a , $a > 0$

esponenziali a^x , $a > 1$

logaritmiche $\log_b x$, $b > 1$

$x \rightarrow +\infty$ sono tutte funzioni infinite

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm \infty \right)$$

vedrò sapere quale delle tre classi va più velocemente a $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{a^x} = 0 \quad \forall a > 0 \text{ e } a > 1$$

$$\text{es. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_b x)^a}{x^\beta} = 0 \quad \begin{matrix} \forall a > 0 \\ \forall \beta > 0 \\ b > 1 \end{matrix}$$

$$\text{es. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_8 x)^{1000}}{x^{\frac{1}{1000}}} = 0$$

scale di infiniti
 (da quello di ordine minore a quello di ordine superiore)

$$(\log_b x)^a \quad x^\beta \quad a^x$$

Altro limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\beta}{(\log_b x)^a}$$

$$\begin{matrix} \beta > 0 \\ a > 0 \\ b > 1 \end{matrix}$$

poiché $\log_b x < 0$ x vicino a 0^+
 non è def. $(\log_b x)^a$ quindi considero

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\log_b x|^\alpha = 0 \quad \begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ b > 1 \end{matrix}$$

0 · +∞

es. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (\log x)^{1000} = 0$$

Def. $f(x), g(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$
(cioè "INFINITE")

se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si dice che g è infinito di ordine superiore a f

se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ f e g sono infinite dello stesso ordine

$\log_b x$ è infinito di ordine inferiore rispetto a x^α ($\alpha > 0$)
che è infinito di ordine inferiore rispetto a a^x ($a > 1$)

Es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^x =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log\left(\frac{3}{x}\right)} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{\log\left(\frac{3}{x}\right)}_{-\infty} = -\infty$$

x^x è infinito di ordine superiore di qualsiasi a^x , $a > 1$

oss.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{x^8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

x^α è infinito di ordine superiore di x^β se $\alpha > \beta$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^x = +\infty$$

- a^x è infinito di ordine superiore di b^x
 se $a > b$ ($a, b > 1$)

es. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x x^3$

$\begin{matrix} x \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x^3 \\ \downarrow \\ -\infty \end{matrix}$

$\begin{matrix} x = -y \\ \uparrow \\ y = -x \\ \text{se } x \rightarrow -\infty \\ \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{matrix}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x x^3 = \lim_{y \rightarrow +\infty} 3^{-y} (-y)^3 =$

$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot (-1)y^3}{3^y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{y^3}{3^y} = 0$

$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x |x|^a = 0 \quad \forall a > 0 \right)$
 $a > 1$

Esercizi

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 4 \cdot 3^x}{x^4 + \sqrt{x} + \log x} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left(2 \frac{x^4}{3^x} + 4 \right)}{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^{4-\frac{1}{2}}} + \frac{\log x}{x^4} \right)}$

$\begin{matrix} \text{red circles} \\ \downarrow \\ +\infty \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{red circles} \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{red circles} \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 4a^x}{x^4 + \log x} \quad a > 0$

vediamo Andare il limite al variare
 di $a > 0$
 parametro.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$

1) $a > 1$ $\frac{2x^4 + 4a^x}{x^4 + \log x} = \frac{a^x \left(\frac{2x^4}{a^x} + 4 \right)}{x^4 \left(1 + \frac{\log x}{x^4} \right)}$

$\begin{matrix} \text{orange circles} \\ \downarrow \\ +\infty \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{orange circles} \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} () = +\infty$

2) $a = 1$ $\frac{2x^4 + 4}{x^4 + \log x} = \frac{x^4 \left(2 + \frac{4}{x^4} \right)}{x^4 \left(1 + \frac{\log x}{x^4} \right)}$

$\begin{matrix} \text{green circles} \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$

3) $a < 1$

$$\frac{2x^4 + 4a^x}{x^4 + \log x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} = 2$$

Handwritten notes: $\frac{2x^4 + 4a^x}{x^4 + \log x} = \frac{x^4(2 + \frac{4a^x}{x^4})}{x^4(1 + \frac{\log x}{x^4})}$

Es. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log_4(\sin x)$

Handwritten notes: si può scrivere finché $\sin x > 0$ in un intorno di x di 0 .

perché vale questo limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\log x|^\beta = 0$

? $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \log_4(\sin x) = 0$?

Handwritten notes: infatti

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log_4(\sin x) =$

$= \lim_{y \rightarrow 0^+} y \log_4 y = 0$

Handwritten notes: $\sin x = y$ & $x \rightarrow 0^+$ $\Rightarrow y \rightarrow 0^+$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \log_4(\sin x) = 0$

allora

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \left(\log_4(\sin x) \right) \cdot \frac{\sin x}{\sin x}$

$\frac{\sqrt{x}}{\sin x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sin x} \right) \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) \left(\log_4(\sin x) \right) \cdot \sin x$

Handwritten notes: $\frac{0}{0} = ?$

$\sin x \dots$ non va bene si fa domani.

si vede in fondo alla lezione ↓

es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{x \sin x - e^{6x}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x}}{e^{6x} \left(\frac{x \sin x}{(e^6)^x} - 1 \right)} =$$

fatti
un'algebra
per la
risposta

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \frac{1}{\left(\frac{x \sin x}{(e^6)^x} - 1 \right)} = 0$$

Es.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x+1)}{\log x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)}{\log x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\log x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\log x} = 1$$

$\frac{0}{\infty} = 0$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{0}{\infty} = 0.0$$

es.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\log(x+1)}} = \infty^0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log \left(x^{\frac{1}{\log(x+1)}} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\log(x+1)} \log x} = e \quad (\text{vedi es. precedente})$$

es.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x^2)}{3^x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \right)}{3^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^2 + \log \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)}{3^x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log x}{3^x} + \frac{\log \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)}{3^x} \rightarrow 0$$

$$\downarrow 0 \\ \text{(limite nulle)} = 0.$$

ERRATA CORRIGE

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log_4(\sin x)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \log_4(\sin x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} \sqrt{\sin x} \log_4(\sin x) = \\ &= \sqrt{\frac{x}{\sin x}} \cdot (\sin x)^{1/2} \log_4(\sin x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/2} \log_4(\sin x) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1/2} \log_4 y = 0 \end{aligned}$$

$y = \sin x$
limite nulle

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log_4(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\sqrt{\frac{x}{\sin x}}}_{\downarrow 1} \underbrace{(\sin x)^{1/2} \log_4(\sin x)}_{\downarrow 0} = 0$$