

# Lezione del 2 Dicembre

se  $\sum a_k$  converge  $\Rightarrow a_k \rightarrow 0$

•  $\sum a_k$

serie a termini di  
segno qualunque

serie a termini  
di segno costante

- criterio confronto
- " " confronto con  
" " rapporto, radice.

$$\sum q^k$$

q ragione  
conv.  $\Leftrightarrow |q| < 1$

$$\sum \frac{1}{k^\alpha}$$

conv.  $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$$\sum$$

$$\frac{1}{k^\alpha (\log k)^\beta}$$

conv.  $\Leftrightarrow \alpha > 1, \forall \beta$   
 $\alpha = 1, \beta > 1$

- convergenza  
assoluta  
cioè

$$\sum |a_k|$$

- conv. assoluta  
 $\Rightarrow$  conv.  $\sum a_k$

- se non conv.  
positivamente  
potrebbe però  
convergere.

Possiamo  
studiare la  
conv.

$$\sum_{a_k \geq 0} (-1)^k a_k$$

Leibniz

- $a_k$  decrescente

- $a_k \rightarrow 0$   $k \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow \sum (-1)^k a_k \text{ conv.}$$

Es. 1  $\sum (-1)^k \frac{k-1}{k^2+k} a_k$

- $a_k$  è decrescente con la def.  $a_{k+1} \leq a_k$

Es. 2  $\sum (-1)^k \frac{\log k}{k}$  ?  $\frac{\log k+1}{k+1} \leq \frac{\log k}{k}$  ?

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ suff. grandi}$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x > e$$

Es. 3  $\sum (-1)^k \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) a_k$

- conv. assoluta  $|a_k| = \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{k}$

$$\log(1+x) \sim x \quad x \rightarrow 0$$

$\sum |a_k|$  ha lo stesso comportamento  $\sum \frac{1}{k}$   
(criterio del confronto  
limitato) ↓  
diverge

$\Rightarrow \sum |a_k|$  diverge

$\Rightarrow \sum a_k$  non converge assolutamente.

• Vediamo se converge.

$$\sum (-1)^k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad \text{Leibniz}$$

$a_k$

1)  $a_k \rightarrow 0 \quad k \rightarrow +\infty$

2)  $a_k$  decrescente

•  $a_{k+1} \leq a_k$

•  $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

• oppure:

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) =$$

$\frac{1}{k}$  decrescente

$1 + \frac{1}{k}$  decrescente

$\log(\dots)$  crescente



$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) =$  composizione di una  
crescente ( $\log(\dots)$ ) con  
una decrescente ( $1 + \frac{1}{k}$ )

$f(g(x))$   
↓  
crescente

↘ decrescente

$$\left[f(g(x))\right]' = \underbrace{f'(g(x))}_{> 0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{< 0} < 0$$

$\Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$  è decrescente.

oss.  $\begin{matrix} f \text{ crescente} \\ g \text{ decrescente} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(g(x)) \text{ decrescente} \\ f'(g(x)) \text{ decrescente} \end{matrix}$

oss.  $f$  decrescente  $f \geq 0$   $\Rightarrow f \cdot g$  è decrescente.

$$(f \cdot g)' = \underbrace{f' \cdot g}_{< 0} + \underbrace{f g'}_{< 0} < 0$$

es.  $a_k = \frac{1}{k} \log \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$  è  
decrescente perché prodotto  
di decrescenti.

Es.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \arctan \left( \frac{2}{n^{1/3}} \right)$

dove per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$

1)  $a_n \rightarrow 0$

2) la serie conv. assolutamente

3) la serie converge.

1)  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \arctan \left( \frac{2}{n^{1/3}} \right)$

$$x \rightarrow 0 \quad \arctan x \sim x$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\frac{2}{n^{1/3}} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

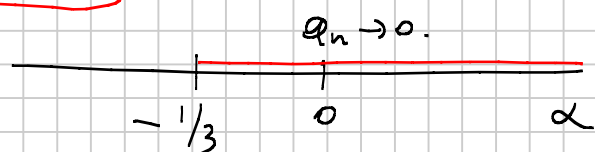
$$a_n \sim (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{2}{n^{1/3}} = (-1)^n \frac{2}{n^{\alpha + \frac{1}{3}}}$$

$$\downarrow n \rightarrow +\infty$$

$$0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{3} > 0$$

$$a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{3}$$



2) conv. assoluta.  $\alpha > -1/3$

$$|a_n| = \frac{1}{n^\alpha} \arctan\left(\frac{2}{n^{1/3}}\right)$$

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \arctan\left(\frac{2}{n^{1/3}}\right)$$

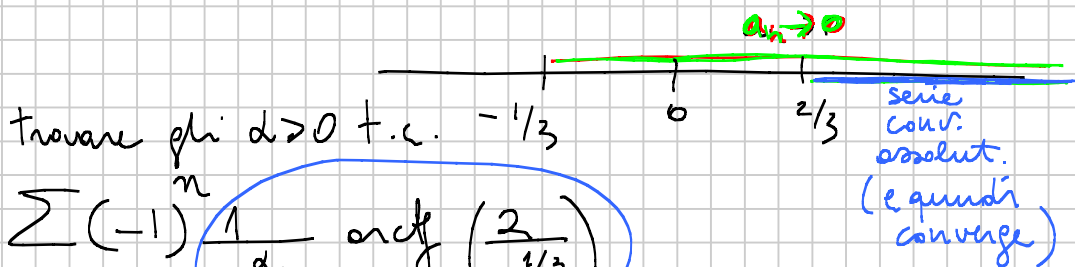
$$\frac{1}{n^\alpha} \arctan\left(\frac{2}{n^{1/3}}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{2}{n^{1/3}} = \frac{2}{n^{\alpha+1/3}}$$

$$\text{converge} \Leftrightarrow \sum \frac{2}{n^{\alpha+1/3}} \text{ converge}$$

↓  
converge se  $\alpha + \frac{1}{3} > 1$   
(serie armonica generalizzata)

$$\sum |a_n| \text{ converge se } \alpha > \frac{2}{3}$$

$$\sum a_n \text{ conv. assolutamente se } \alpha > \frac{2}{3}$$

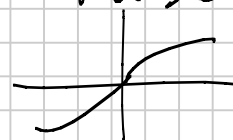


3)  $\sum (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{a_n} \underbrace{\arctan\left(\frac{2}{n^{1/3}}\right)}_{a_n} \text{ converge.}$

Leibniz

•  $a_n \rightarrow 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad (\forall \alpha > -1/3)$

•  $a_n = \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{\text{decresc. } \forall \alpha > 0} \cdot \underbrace{\arctan\left(\frac{2}{n^{1/3}}\right)}_{\text{decrescante}} \quad \text{è decrescante } \forall \alpha > 0.$



la serie  $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \arctan\left(\frac{2}{n^{1/3}}\right) \text{ conv. } \forall \alpha > 0$

oss. Questo argomento non si può sempre spiegare

$$\underbrace{n}_{\text{crescente}} \text{ and } \underbrace{\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{decrescente}} = ?$$

$$(f \cdot g)'$$

$$f(x) = x \text{ and } \left(\frac{1}{x^2}\right) \quad f' = \dots$$

Es.

$$\sum \frac{\sqrt{n^4 + 2n} - n^2}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n})$$

seno e termini  
di segno qualsiasi

$\sin \sqrt{n}$  non ha limite per  $n \rightarrow +\infty$  ma è  
limitato.

$$\lim_n \frac{\sqrt{n^4 + 2n} - n^2}{\sqrt{n}} = \lim_n \frac{\sqrt{n^4 + 2n} - n^2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n^4 + 2n} + n^2}{\sqrt{n^4 + 2n} + n^2}$$

$$= \lim_n \frac{\cancel{n^4} + 2n - \cancel{n^4}}{\sqrt{n} \left( n^2 \sqrt{1 + \frac{2}{n^3}} + n^2 \right)}$$

$$= \lim_n \frac{\cancel{2n}}{\sqrt{n} \cancel{n^2} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n^3}} + 1 \right)} = 0$$

$$a_n = \text{infinitesimo} \cdot \text{limitato} \rightarrow 0$$

( $\sin \sqrt{n}$ )

$$\sum \frac{\sqrt{n^4 + 2n} - n^2}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n})$$

studio la parte assoluta

$$|\sin(\sqrt{n})| \leq 1$$

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n^4 + 2n} - n^2}{\sqrt{n}} |\sin(\sqrt{n})| \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{n^4 + 2n} - n^2}{\sqrt{n}}$$

dal criterio del confronto

se  $\sum \frac{\sqrt{n^4 + 2n} - n^2}{\sqrt{n}}$  converge

$\Rightarrow \sum |a_n|$  converge.

$$\frac{\sqrt{n^4 + 2n} - n^2}{\sqrt{n}} \sim \frac{2}{n\sqrt{n} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n^3}} + 1 \right)}$$

$$\sim \frac{2}{n\sqrt{n} \cdot 2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Dal criterio del confronto si sa che per  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  converge (serie armonica generalizzata con  $\alpha > 1$ )

$\Rightarrow \sum \frac{\sqrt{n^4 + 2n} - n^2}{\sqrt{n}}$  converge

$\Rightarrow \sum |a_n|$  converge

cioè  $\sum a_n$  conv. assolutamente e quindi converge.

Es.

Dire per quali  $\alpha \geq 0$

$$\sum \frac{n 2^n + 5^n}{\alpha^n + 3^n} \quad \text{converge}$$

$$a_n = \frac{5^n \left( n \left( \frac{2}{5} \right)^n + 1 \right)}{\alpha^n \left( 1 + \left( \frac{3}{\alpha} \right)^n \right)} \quad \alpha > 3$$

$$a_n = \frac{5^n \left( n \left( \frac{2}{5} \right)^n + 1 \right)}{3^n \left( \left( \frac{\alpha}{3} \right)^n + 1 \right)} \quad \alpha < 3$$

$$a_n = \frac{5^n (n (\frac{2}{5})^n + 1)}{2 \cdot 3^n} \quad \alpha = 3$$

$\alpha > 3$   $a_n \sim \left(\frac{5}{\alpha}\right)^n$   
 $\sum a_n \text{ conv.} \Leftrightarrow \sum \left(\frac{5}{\alpha}\right)^n \text{ conv.}$

$$\frac{5}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 5$$

$\alpha < 3$   $a_n \sim \left(\frac{5}{3}\right)^n$   $\sum a_n \text{ diverge } \forall \alpha < 3$

$\alpha = 3$   $a_n \sim \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}\right)^n$   $\sum a_n \text{ diverge } \forall \alpha = 3$

R.  $\sum a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 5$

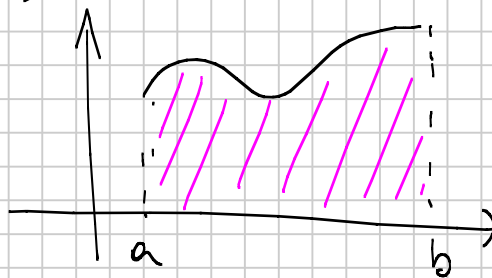
## Integrali (secondo Riemann)

1) Derivate

$\updownarrow$   
 valore la  
 variazione istantanea di una funzione  $f(x)$



2) Integrali  $\Leftrightarrow$  valore un'area nel piano



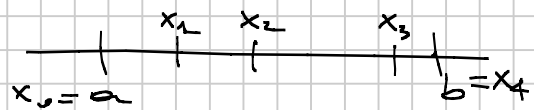
## Procedimento

Def.  $[a, b]$  intervallo limitato

$D$  è una suddivisione di  $[a, b]$  e

$$D = \{x_i : i = 0, 1, \dots, n\}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$



$[a, b]$  è diviso in  $n$  intervalli

se aggiungo a  $D$  un altro punto trovo una suddivisione  $\overline{D}$  più FINE

Def.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata  
 $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

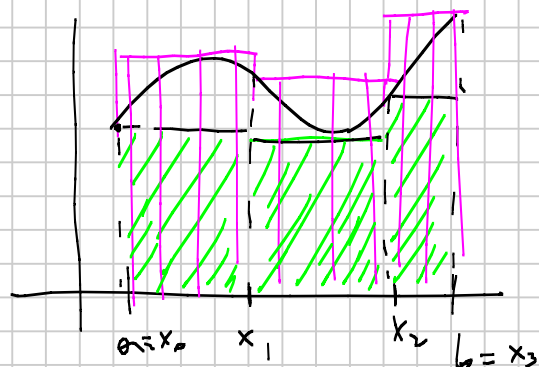
$D$  suddivisione di  $[a, b]$

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$(x_i, x_{i-1})$  intervalli nei quali è stato diviso  $[a, b]$

$$m_i = \min_{(x_{i-1}, x_i)} f$$

$$M_i = \max_{(x_{i-1}, x_i)} f$$



$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i = \text{area dei tre rettangoli di base } x_i - x_{i-1} \text{ e altezza } m_i \text{ nei tre intervalli (in fuso)}$$

$S(D, f)$  SOMMA INFERIORE di  $f$  relativa a  $D$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i = \text{area dei tre rettangoli di base } x_i - x_{i-1} \text{ e altezza } M_i \text{ nei tre intervalli}$$

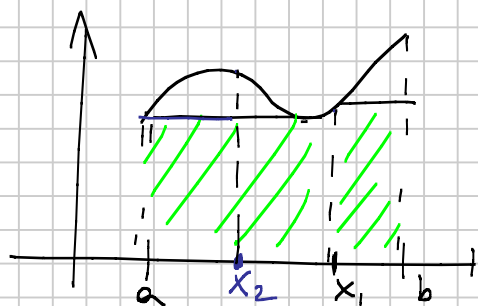
$S(D, f)$  SOMMA SUPERIORE di  $f$  relativa a  $D$

$$S(D, f) \leq S(D, f)$$

oss. Se cambio suddivisione mi cambiano anche  $S$  e  $S$

$S$

se si aggiunge un punto



$$S(D) \leq S(\bar{D})$$

$$S(D) \geq S(\bar{D})$$

se  $\bar{D}$  è  
fin fin di  $D$

Def.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata, è INTEGRABILE  
(secondo Riemann) in  $[a, b]$  se

$$\sup_D S(D, f) = \inf_{\bar{D}} S(\bar{D}, f)$$

e questo valore è  $\int_a^b f(x) dx$

"integrale di  
 $f(x)$  in  $dx$   
tra  $a$  e  $b$ "

$f$  = funzione integranda

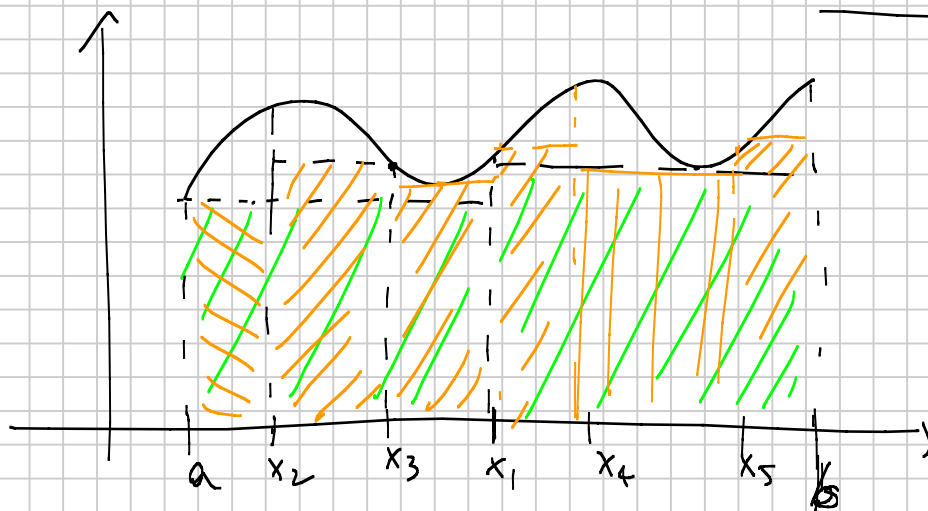
$[a, b]$  = dominio di integrazione

$f(x) dx$  è solo un'espressione formale

$x$  variabile "morta"

$$\int_a^b f(s) ds$$

è un  
numero



$$S(a, x_1, b) = \text{area verde}$$

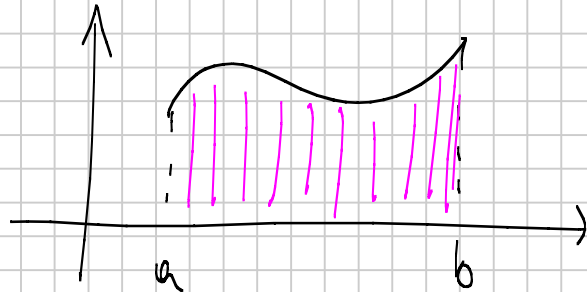
$$\bar{S}(a, x_2, x_3, x_1, x_4, x_5, b) = \text{area arancione}$$

$$\bar{S} > S$$

analogamente

$$\bar{S} < S$$

significato geometrico se  $f \geq 0$

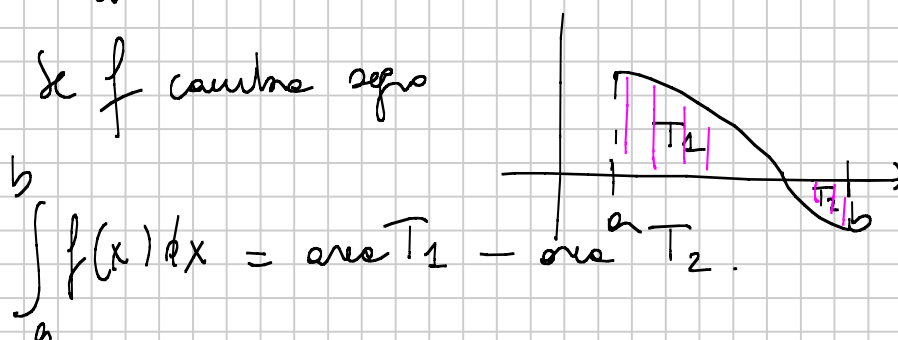


$\int_a^b f(x) dx = \text{area del trapezoide sotto il grafico di } f \text{ tra } [a, b]$



$$\int_a^b f(x) dx = - \text{area delle regione in rosso.}$$

se  $f$  cambia segno

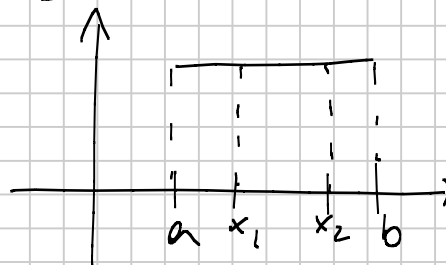


$$\int_a^b f(x) dx = \text{area } T_1 - \text{area } T_2.$$

ES.  $f(x) = c$  in  $[a, b]$

Voglio calcolare

$$\int_a^b f(x) dx$$



$$m_i = c$$

$$M_i = c$$

$$S(D) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot c = c(b-a)$$

$$S(D) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot c = c(b-a)$$

questo vale  $\forall$  suddivisione  $D$

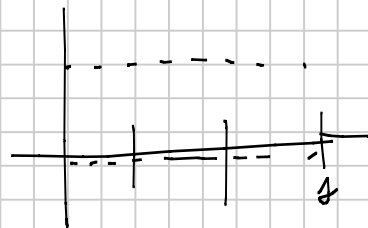
$$\sup_D S(D) = \sup c \cdot (b-a) = c(b-a)$$

$$\inf S(D) = \inf c(b-a) = c(b-a)$$

$$\text{perciò } \sup S = \inf S = \int_a^b c dx = c \cdot (b-a)$$

es. Non tutte le f. limitate sono integrabili

$$f = \begin{cases} 1 & \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altimenti} \end{cases}$$



$$m_i = 0$$

$$S = 0$$

$$M_i = 1$$

$$S = 1 \cdot (b-a)$$

$$\sup S = 0$$

$$\inf S = b-a$$

$\neq \Rightarrow$  f non è integrabile