

Lezione del 30 Ottobre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_b x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ b > 1 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0 \quad \begin{matrix} a > 1 \\ \beta > 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\log_b x|^\beta = 0$$

es. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log_4(\sin x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} \right) \cdot \sqrt{\sin x} \log_4(\sin x)$$

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$
 $\sqrt{\sin x} \log_4(\sin x) \rightarrow 0$ (l'ultimo è 0)
 $\sqrt{t} \log_4 t \rightarrow 0$ (l'ultimo è 0)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\sin x} \log_4(\sin x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \log_4 t = 0$
 (l'ultimo è 0)
 limite notevole

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\dots) = 0$.

oss. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\cos x} \log_4(\cos x) = 0$

se si fa la sostituzione $\cos x = t$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\cos x} \log_4(\cos x) = \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t} \log_4 t$$

Non $t \rightarrow 0$
 Quindi non è un limite notevole
 ma è + facile
 non è f.v.

Succezioni e limiti di successioni

$$a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

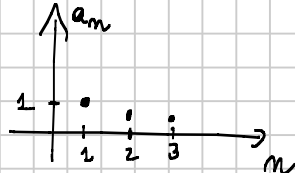
$$a(n)$$

$$f(n)$$

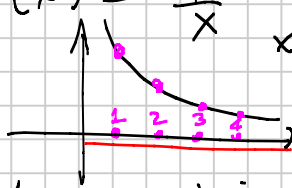
es. $a_n = \frac{1}{n}$ successione $\forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \end{aligned}$$

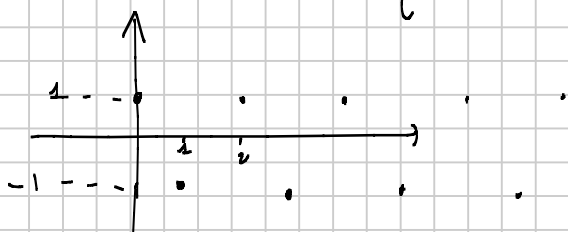
$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$a_n = \frac{1}{n} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$$



es. $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$



es. $a_n = \sin n$ $\begin{matrix} a_1 = \sin 1 \\ a_2 = \sin 2 \\ \vdots \end{matrix}$

Definizione di limite di successione

$$a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

per $\mathbb{N}$ l'unico j.to di accumulazione
è $+\infty$, quindi possiamo fare
solo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{successione convergente} \\ \pm\infty & \text{succ. divergente} \\ \neq & \text{inequale} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow +\infty & \text{ intervallo } U \text{ di } \mathbb{R}_\infty \text{ è } (N, +\infty) \\ & \text{ intervallo } V \text{ di } l \text{ è } \begin{cases} (l-\varepsilon, l+\varepsilon) & l \in \mathbb{R} \\ (M, +\infty) & l = +\infty \\ (-\infty, M) & l = -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon, \forall n > N$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \exists N \text{ t.c. } a_n > M, \forall n > N$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \exists N \text{ t.c. } a_n < M, \forall n > N$$

Quindi per verificare un limite di successione
bisogna trovare **N**.

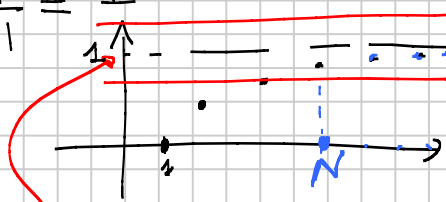
es. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$

$a_1 = 0$

$a_2 = \frac{1}{3}$

$a_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underline{N} \text{ t.c. } |a_n - 1| < \varepsilon \quad \forall n > N$



$$\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n-1 - \cancel{n} - 1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon$$

$$n+1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

se $n > N \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon \quad \left| n > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right|$

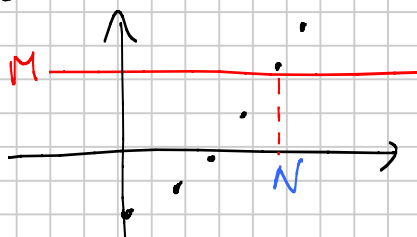
es. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5 = +\infty$

$a_0 = -5$

$a_3 = 4$

$a_1 = -4$

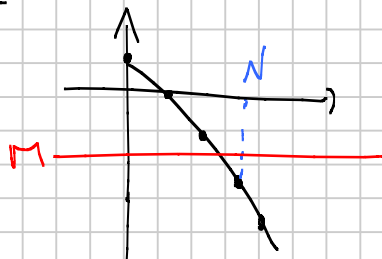
$a_2 = -1$



$\forall M \exists N : a_n > M \quad \forall n > N$
(verificare)

es. $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 + 1 = -\infty$

$\forall M \exists N : a_n < M \quad \forall n > N$
(verificare).



Proprietà dei limiti di successione

1) Unicità del limite

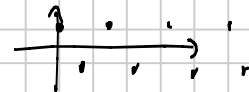
2) Permanenza del segno
(se $\lim_n a_n = l > 0 \Rightarrow a_n > 0$)
per n suff. grande

(se $a_n \geq 0 \Rightarrow l \geq 0$)

3) se la successione $\{a_n\}$ è convergente $\Rightarrow \bar{e}$ limite

oss. non vale il converse.

es. $(-1)^n$



è limitata ma non ha limite.

4) teorema del confronto

se $a_n \leq b_n \leq c_n$

e $\lim_n a_n = \lim_n c_n = l$

Allora $\lim_n b_n = l$

5) teoremi sulle operazioni sui limiti
(anche aritmetiche e potenze).

Successioni monotone

Def. a_n è crescente se $a_{n+1} \geq a_n$
" è dec- " " $a_{n+1} \leq a_n$
 $\forall n$

es. $a_n = n+1$ è crescente

? $a_{n+1} \geq a_n$

$\downarrow$
? $(n+1)+1 \geq n+1$ $2 \geq 1$ sì!
vero $\forall n$.

$a_n = \frac{n-1}{n+1}$ è crescente?

? $a_{n+1} \geq a_n$

? $a_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} \geq \frac{n-1}{n+1} = a_n$

$\frac{n}{n+2} \geq \frac{n-1}{n+1}$

$n(n+1) \geq (n+2)(n-1)$

$n^2 + n \geq n^2 - n + 2n - 2$

$0 \geq -2$ vero $\forall n$

oss.

1) Confronto di due funzioni
crescenti è funzione crescente

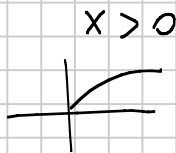
2) Confronto di una funzione
crescente per una decrescente
è decrescente

3) Confronto di due decrescenti
è crescente.

es.

$$\log(\arctan x)$$

$\log y$ è crescente



è crescente

$$\log\left(\frac{1}{x}\right)$$

$x > 0$

$\frac{1}{x}$ decrescente
 $\log y$ crescente

decrescente.

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log n}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ decrescente
 $\log n$ crescente

decrescente.

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ decresc.
 $\frac{1}{n}$ decresc.

crescente.

Teo. (del limite delle successioni monotone)

$\exists$ sempre (finito o infinito) il
limite di una successione monotone

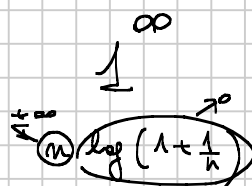
(cioè una successione monotona non può mai essere irregolare)

oss. Se $\{a_n\}$ è monotona e
limitata. $\Rightarrow \exists$ sempre limite
finito $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$
cioè è convergente

Numero e di Nepero

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$



si può dim. che

a_n è crescente e limitata

$\Rightarrow \exists$ finito $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ e

definisco

$$e \doteq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

si può dim. che $e \notin \mathbb{Q}$
e che $2 < e < 3$

si può dimostrare che tale limite
vale anche con x al posto di n

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

serve per risolvere i limiti
di successioni o di funzioni
del tipo 1^∞ .

conseguente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{a \cdot y} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^a = e^a \end{aligned}$$

$a \in \mathbb{R}$
 $a \neq 0$

$\frac{a}{x} = \frac{1}{y}$
 $x = a \cdot y$
 $y = \frac{x}{a}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\begin{aligned} \text{es. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= \frac{1}{e} \quad (a = -1) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{es. } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e \end{aligned}$$

$\frac{1}{x} = y$
 $x = \frac{1}{y}$

$$\text{es. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \log \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = 1$$

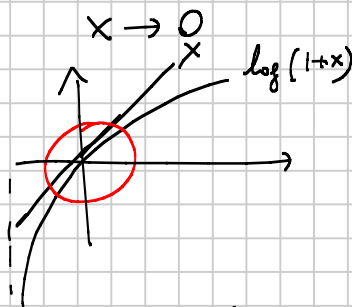
(vedi es. precedenti)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$\frac{0}{0}$

- Quindi $\log(1+x)$ è infinitesimo di ordine 1 (perché confrontato con x^1) per $x \rightarrow 0$

- $\log(1+x) \sim x$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} y &= e^x - 1 \\ e^x &= y + 1 \\ x &= \log(y+1) \end{aligned}$$

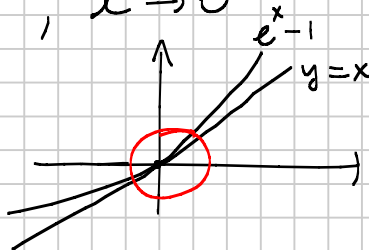
$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(y+1)} = 1$$

vedi limite sopra

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

- $e^x - 1$ è infinitesimo dello stesso ordine di x , per $x \rightarrow 0$, cioè di ordine 1

- $e^x - 1 \sim x$, $x \rightarrow 0$



es.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\log a^x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log a} - 1}{x}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \log a =$$

$$x \log a = y$$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow 0 \\ y &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{y}{\log a}$$

$$= \log a$$