

Lezione del 3 dicembre

Integrale di Riemann

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata

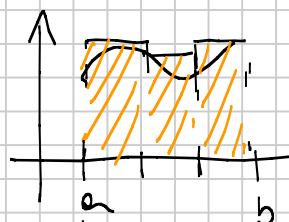
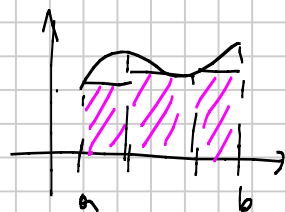
D suddivisione di $[a, b]$

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

somma
superiore
di f relativa
a D .

somma
inferiore di f
relativa a D



f è integrabile (secondo Riemann) se
 $\sup_D s(D, f) = \inf_D S(D, f) =: \int_a^b f(x) dx$

• $f \geq 0$ $\int_a^b f(x) dx =$ area tra il grafico di f e l'asse delle ascisse

oss. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1 dx$$



non conta il
valore che f
assume in $x=0$.

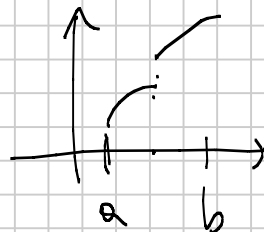


lei abbiamo fatto un esempio di una funzione
limitata ma non integrabile.

Teo. $f \in C^0([a, b])$ (continua in $[a, b]$)
 $\Rightarrow f$ è integrabile

Teo f è monotona in $[a, b] \Rightarrow f$ è integrabile

Teo. f ha un numero finito di
p.t.h di discontinuità, f limitata
 $\Rightarrow f$ è integrabile



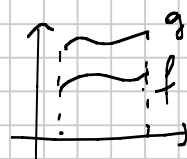
Proprietà dell'integrale

Teo. f, g integrabili in ${}_b(a, b)$ allora

$$1) \int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

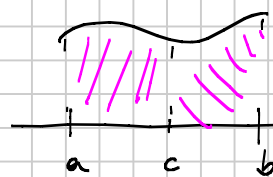
$$2) f \leq g \text{ in } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(f=0 \quad g \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \geq 0)$$



3) $|f|$ è integrabile in ${}_b(a, b)$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$



4) $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

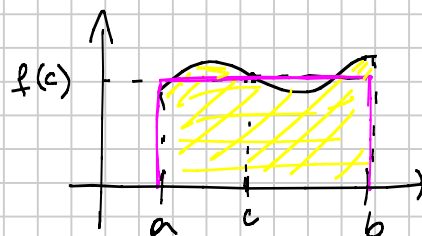
5) Teorema della media

f continua in $[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] \text{ t.c.}$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Media
integrale di f

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{f(c)}_{\text{area rettangolo}} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\text{area rettangolo}}$$



Notazione

Se $a > b$

$$\int_a^b f(x) dx \doteq - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_1^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx$$

Come si fa a calcolare un integrale

Def. f definita in $[a, b]$. $F(x)$ derivabile
è una PRIMITIVA di f in $[a, b]$
se $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

es. $f(x) = \sin x$ $F(x) = -\cos x$

$$f(x) = x \quad F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ in } [1, 2] \quad F(x) = \log x$$

Proprietà 1 Se F è una primitiva di f
 $\Rightarrow F + K$ (K costante) è primitiva di f .

Dim. Ts. $F + K$ è primitiva di f .

$$(F + K)' = F' + 0 = f$$

es. $f(x) = \sin x$ $F(x) = -\cos x$

$$G(x) = -\cos x + K$$

è una primitiva. $K \in \mathbb{R}$

Proprietà 2 Se F_1 e F_2 sono 2 primitive
di f allora $F_1 = F_2 + K$ in $[a, b]$.

Dim. $F_1' = f \Rightarrow F_1' - F_2' = 0$
 $F_2' = f \quad \Downarrow$
 $(F_1 - F_2)' = 0$
in $[a, b]$

dal teo. della derivata nulla

$$\Rightarrow F_1 - F_2 = K \Rightarrow F_1 = F_2 + K$$

K costante.

Quindi se si trova una primitiva di f
le abbiamo trovate tutte.

es. $f(x) = \sin x \quad F(x) = -\cos x$
tutte le primitive $= -\cos x + K$
 $K \in \mathbb{R}$

Notazione

$$\{ \text{primitive di } f \} = \int f(x) dx \quad \text{integrale indefinito.}$$

es. $\int \sin x dx = \{ \text{tutte le primitive del } \sin x \} = -\cos x + K$
 $K \in \mathbb{R}$.

Collegamento tra $\int f(x) dx$ e $\int_a^b f(x) dx$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad c \in [a, b] \text{ fisso}$$

Allora $F(x)$ è derivabile in $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$
 $\forall x \in [a, b]$

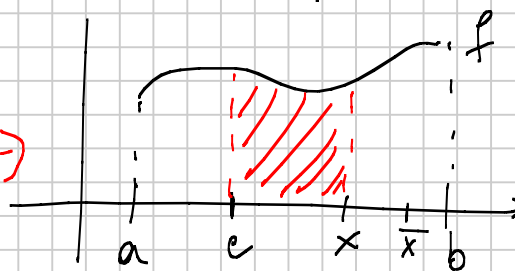
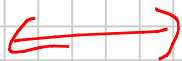
(cioè F è primitiva di f).

Provare di fare le dim.

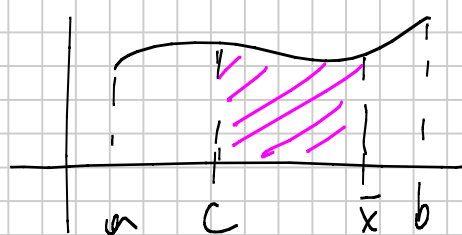
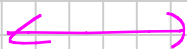
$$F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

Funzione
integrale
di f

$$\int_c^x f(t) dt$$



$$\int_c^{\bar{x}} f(t) dt$$



$$\int_c^x f(t) dt$$

cambia il valore di x
perciò cambia l'area
(tra $[c, x]$)

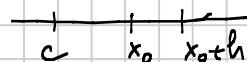
è una funzione che dipende da x

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

Dim. (del teo. fond. del calcolo integrale)

Ts. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Calcoliamo $F'(x)$



$$F(x_0 + h) - F(x_0) =$$

$$\frac{1}{h} \left(\int_c^{x_0+h} f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \left(\int_c^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt \right) =$$

(additività rispetto all'intervallo di integrazione)

$$= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

Medie integrate di f tra x_0 e x_0+h

$\exists c_n \in [x_0, x_0+h]$
b.c.

$$= f(c_n)$$

f continua! $f \in [a, b]$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$$

teorema media integrale

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(c_n)$$

dove $c_n \in [x_0, x_0+h]$

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_n) = f(x_0)$$

$$x \cdot h \rightarrow 0 \Rightarrow c_n \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow f(c_n) \rightarrow f(x_0)$$

perché f è continua

Quindi $F'(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in [a, b]$

cioè $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

oss. Il teo. fondamentale del calc. integrale
 ci dice che ogni funzione f continua
 ha una primitiva (che è $\int_c^x f(t) dt$).

Corollario

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. $G(x)$ primitiva
 di $f(x)$.

Allora $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b$

Dim. $G(x)$ è una funzione di f .

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è una primitiva di f
(per il teorema fond. del calcolo integrale)
 $x_0 = a$

G e F differiscono per una costante

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt + K \quad K \in \mathbb{R}$$

$$G(a) = \int_a^a f(t) dt + K = K$$

F(x)
 $= 0$

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt + G(a)$$

$$G(b) = \int_a^b f(t) dt + G(a)$$

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) \quad \#$$

Es.

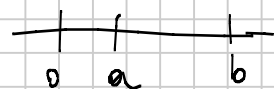
$$\int_a^b \sin x dx = (-\cos x) \Big|_a^b = -\cos b + \cos a$$

$G(x) = -\cos x$
primitiva di $\sin x$

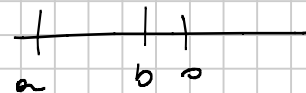
oss. $\int_a^b f(x) dx$ si calcola attraverso una primitiva di f

$$\text{es.} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_a^b =$$

$$= \log b - \log a$$



$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log(-x) \Big|_a^b$$

$$a, b < 0$$


$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x < 0$$

$$G(x) = \log|x| = \log(-x)$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log(-b) - \log(-a)$$

$$G'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow G(x) = \log|x|$$

$$f(x) = x^\alpha \quad G(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + K$$

→ "tutte le primitive"

Per trovare $\int_a^b f(x) dx$ basta trovare una primitiva di f .

oss. $\ln(x)$ elementare $\Rightarrow \ln'(x)$ elementare.

$\ln(x)$ elementare $\nRightarrow \int \ln(x) dx$ è elementare

$$f(x) = e^{-x^2}$$

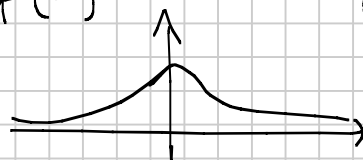
$\Rightarrow$ non si riesce a calcolare esplicitamente la sua primitiva.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

continua $\Rightarrow$ per il teo. fond. calcolo integrale

$\Rightarrow \exists$ primitive ma non le conosciamo.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = G(1) - G(0) \quad G = ?$$



$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

non si riesce a trovare
la funzione.

es.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = (\arctan x) \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

