

Lezione del 4 Novembre

1^a parte

Funzioni continue

Def. $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $x_0 \in X$, punto di accumulazione per X .

f si dice continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in X, |x - x_0| < \delta)$$

Def. f è continua in A se è continua in ogni $x \in A$.
 $f \in C(A)$
 $f \in C^0(A)$

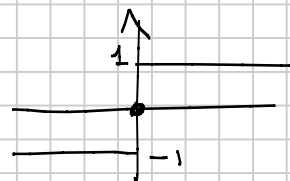
Def. f è continua a destra in x_0 se
 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
 f è continua a sx in x_0 se
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

oss. f è continua in $x_0 \Leftrightarrow f$ è continua a dx e a sx.

Es. Dalle osservazioni fatte sui limiti di funzioni, tutte le funzioni elementari sono continue dove sono definite.

x^a , $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, a^x , ...
continue nel loro dominio di definizione.

Es. $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

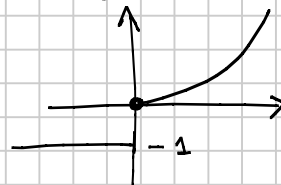


f non è continua in $x=0$
ma è continua in ogni $x \neq 0$.

Es. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

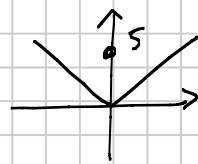
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$$



$\Rightarrow f$ è continua da dx in $x=0$ ma non è continua in $x=0$.

f è continua in ogni $x \neq 0$.

es. $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^-} f = 0 \neq f(0) = 5$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ ma } \neq f(0)$$

oss. Si parla di continuità solo nei punti in cui è definita la funzione

es. $f(x) = \frac{1}{x}$ dominio = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
non ha senso studiare la continuità in $x=0$ perché $f(x)$ non è definita in $x=0$

es. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ Dominio = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
continua nel suo dominio di definizione.

Proprietà delle funzioni continue

① Del teorema sulle operazioni mi lichi

$$f \text{ e } g \text{ continue in } x_0 \Rightarrow \begin{matrix} f+g \\ f-g \\ f \cdot g \\ c \cdot f \\ \frac{f}{g}, g \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{continue in } x_0$$

es. $\frac{3x^2 + 2 \sin x + \lg x}{e^x + \lg x}$ è continua dove è definita

② Teorema della permanenza del segno

f è continua in $x_0 \in X$ e $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists$ un intorno di x_0 t.c. $f(x) > 0 \forall x \in U$.