

Lezione del 4 Novembre (seconda parte)

③ f continua in x_0
 g continua in $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ è
 continua in x_0 .



(composizione di f continua e continua).

es. $\log(1 + \sin(e^x))$

es. $\nearrow$ dove è definita
 p.c. $\nearrow$ è continua
 Trovare dove è definita

Classificazione dei punti di discontinuità (punti in cui la funzione non è continua)

1) Discontinuità eliminabile:

$$\exists \text{ finito } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

2) Discontinuità di salto (o di 1^a specie)

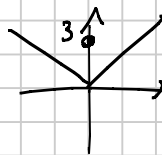
$$\exists \text{ finiti } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

ma sono diversi

3) Discontinuità di 2^a specie:

tutto il resto

es. $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$



$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 3$$

Si può rendere continua in $x=0$

"togliendo" il 3, cioè cambiando
 di "poco" la definizione di $f(x)$

$$f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{anche in } x=0).$$

es. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$

dominio = $\mathbb{R}$

è continua in ogni $x \neq 0$
perché quoziente di funzioni
continue.

Vediamo se è continua in $x=0$

$$? \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 5$$

quindi $f(x)$ non è continua in $x=0$
e la discontinuità è eliminabile

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases} \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



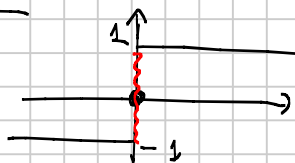
$\bar{f}(x)$ è continua
in tutto $\mathbb{R}$

cioè quando
da f a $\bar{f}$
ho eliminato la
discontinuità.

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$



$$\text{salto della funzione} = 1 - (-1) = 2$$

$f(x)$ ha una discontinuità di salto
in $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

dominio di $f(x) = \mathbb{R}$

continuità nei punti del dominio

$x \neq 0$ $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è continua $\forall x \neq 0$.

? $x=0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{?}{=} f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \neq \text{e} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 0^-}$$

$\Rightarrow$ in $x=0$ ho una discontinuità
di 2^a specie.



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq$$

$\Rightarrow$ discontinuità di 2^a specie.

Es. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
funzione di Dirichlet



esempio di funzione discontinua
in ogni $x_0 \in \mathbb{R} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow x_0}$
(2^a specie).

Invece:

Teo. f è monotona in un intervallo
 $\Rightarrow$ non può avere discontinuità di 2^a specie.



Esercizi su limiti di funzioni e di successioni

Es. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{x+1} + x^2}{\pi^x - e^{-x} - 2x^3 + \sin x}$ studio del limite al variare di $a > 0$.

$$a^{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & a < 1 \\ 1 & a = 1 \end{cases}$$

$a > 1$

$$\frac{a^{x+1} \left(1 + \frac{x^2}{a^x \cdot a} \right)}{\pi^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\pi^x} - 2 \frac{x^3}{\pi^x} + \frac{\sin x}{\pi^x} \right)}$$

scale degli ordini

$$a \cdot \frac{a^x}{\pi^x} = a \left(\frac{a}{\pi} \right)^x$$

$\frac{1}{e^x \pi^x} \rightarrow 0$
 (unfunktionell für Limits)

$$a \left(\frac{a}{\pi} \right)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & a > \pi \\ \pi & a = \pi \\ 0 & a < \pi \end{cases}$$

$a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} () = \begin{cases} +\infty & a > \pi \\ \pi & a = \pi \\ 0 & 1 < a < \pi \end{cases}$$

$a = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2}{\pi^x (1 + \dots)} =$$

$\rightarrow 0$
 $x \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)}{\pi^x (1 + \dots)} = 0$$

$a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{x+1} + x^2}{\pi^x (1 + \dots)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{a^{x+1}}{x^2} + 1 \right)}{\pi^x (1 + \dots)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{()}{()} = \begin{cases} +\infty & a > \pi \\ \pi & a = \pi \\ 0 & 0 < a < \pi \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x - 7^x}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x \left(\left(\frac{5}{7} \right)^x - 1 \right)}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 7^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x \left(\left(\frac{5}{7} \right)^x - 1 \right)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 7^x}{x} = \log\left(\frac{5}{7}\right).$$

$$\log\left(\frac{5}{7}\right)$$

Es. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\right) = +\infty$

es. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right)$

$+\infty$

≥ 0
 $= \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{3x^4 + x^5 \cos x}}$$

$$\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1 \text{ as } t \rightarrow 0$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{3x^4 + x^5 \cos x}}$$

$1 \text{ as } x \rightarrow 0$

$$\frac{x^2}{\sqrt{3x^4 + x^5 \cos x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^4(3 + x \cos x)}} = \frac{1}{\sqrt{3 + x \cos x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\right) = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2 + 7}{2n + 1}}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2 + 7}{n(2n + 1)}} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+7}{n(2n+1)}} \right] \xrightarrow{\frac{n^2+7}{n(2n+1)} \rightarrow \frac{1}{2}} e^{1/2}$$

2^e modo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+7}{2n+1}} = e^{\frac{n^2+7}{2n+1} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$\frac{n^2+7}{2n+1} \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

se $n \rightarrow +\infty$
 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$\frac{n^2+7}{(2n+1)n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

limite notevole
 $\frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$

e quindi si ritrova il risultato di prima
okkio quando si applicano i limiti notevoli...

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

non tende a zero!

$$\text{es. } \lim_n \left(\frac{n^2+3n-7}{n^2+1} \right)^{\log n} = 1^\infty$$

$$= \lim_n e^{\log n \cdot \log\left(\frac{n^2+3n-7}{n^2+1}\right)}$$

$$\lim_n \log n \cdot \log\left(\frac{n^2+1-1+3n-7}{n^2+1}\right)$$

$$= \lim_n \log n \cdot \log\left(1 + \frac{3n-8}{n^2+1}\right) =$$

se $n \rightarrow +\infty$
 $\frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$

$$= \lim_n \log n \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{3n-8}{n^2+1}\right)}{\frac{3n-8}{n^2+1}} \cdot (3n-8)$$

$$\log n \cdot \left(\frac{3n-8}{n^2+1} \right) =$$

$$= \log n \cdot \frac{n \left(3 - \frac{8}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

(scala infinita) 0

$$\Rightarrow \lim_n (\quad) = e^0 = 1$$