

Lezione del 5 Novembre

Funzioni continue

- $x_0 \in X = \text{dominio di } f$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f \text{ è continua in } x_0.$
- tipi di discontinuità $\begin{cases} \text{eliminabile} \\ 1^a \text{ specie} \\ 2^a \text{ specie} \end{cases}$
- Proprietà delle f. continue.
- Discontinuità delle f. monotone.

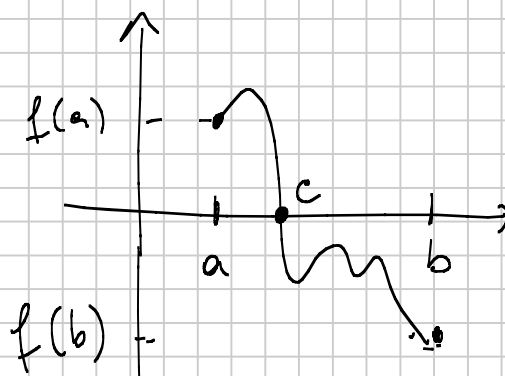
Proprietà di funzioni continue su intervalli

Teorema degli zeri

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e
 $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ (oppure viceversa cioè $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$)

$\Rightarrow \exists$ almeno un punto $c \in (a, b)$ t.c.
 $f(c) = 0$

Dim. no!



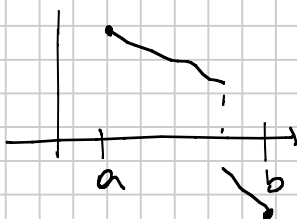
oss. tutte le ipotesi del teorema sono necessarie

$X = [a, b]$

f continua

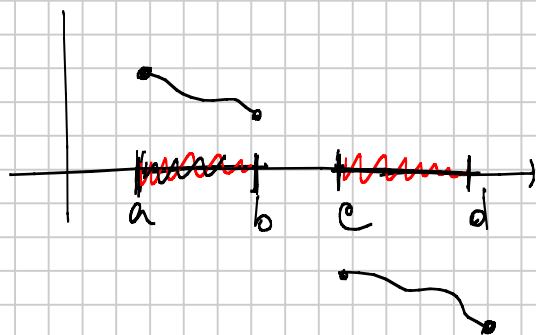
$f(a) > 0, f(b) < 0$

se f non è continua



se f non è def. in un intervallo

$$X = [a, b] \cup [c, d]$$



f continua
 $f(a) > 0$
 $f(d) < 0$

$\Downarrow$
 ma $\neq$ zero!

Applicazione

$f(x)$ definita su tutto $\mathbb{R}$

Vogliamo risolvere l'equazione $f(x) = 0$

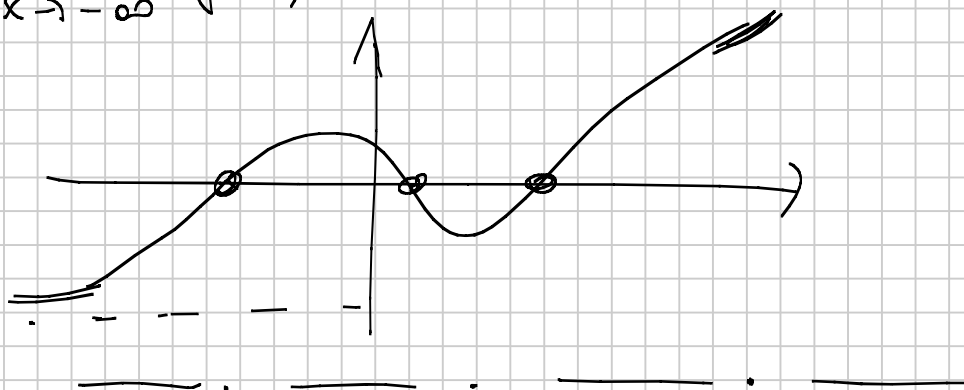
es. $f(x) = \sin x + \log x - x^3 + e^{3x} = 0$

$\exists \bar{x} : f(\bar{x}) = 0$? anche se $x \rightarrow \infty$
 non
 riesco a trovarla
 esplicitamente?

se $f(x)$ def. in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 > 0 \quad (\text{anche } +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2 < 0 \quad (\text{anche } -\infty)$$



Teorema dei valori intermedi

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f continua.

Allora f assume tutti i valori compresi tra $\sup_{(a, b)} f$ e $\inf_{(a, b)} f$.

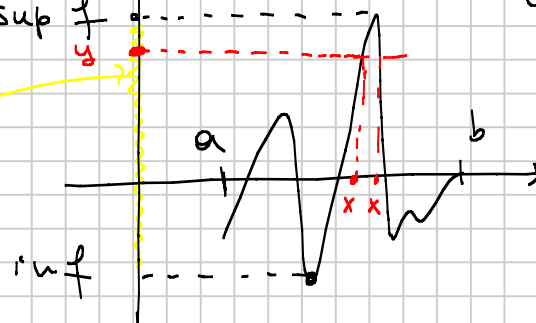
$$(\forall y \in (\inf_{(a, b)} f, \sup_{(a, b)} f)) \exists x \in (a, b) \text{ t.c. } f(x) = y$$

cioè

$$\text{Im } f = f((a,b)) = (\inf_{(a,b)} f, \sup_{(a,b)} f)$$

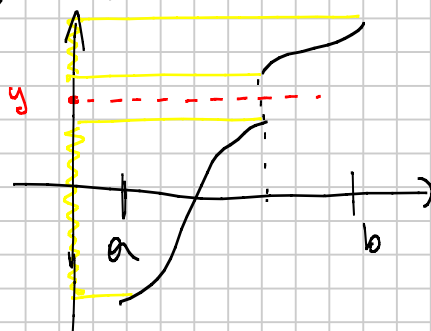
Dim. no.

$$(\inf f, \sup f) =$$



oss. f continuo manda intervalli in intervalli

se f non è continuo non è vero:



Continuità delle funzioni inverse

Teorema $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile $\Rightarrow f^{-1}$ è continua in $\text{Im } f$.

Dim. no.

es. $\arcsin x$

$\arccos x$

$\arctan x$

$\sin x: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

$\Rightarrow$ sono continue dove sono definite

es.

$$f(x) = \arcsin(\log(x^{\cos x}))$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \quad (x^{\cos x} > 0)$$

$\Rightarrow$ Dominio

$$\begin{cases} -1 \leq \log(x^{\cos x}) \leq 1 \end{cases}$$

f è continua nel suo dominio?
Sì!

Teorema di Weierstrass

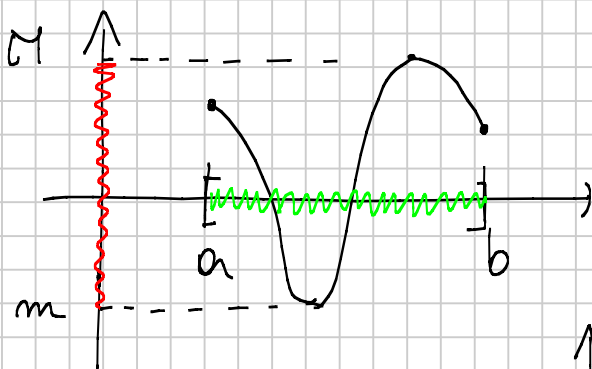
vale solo su
(Intervallo
chiuso e
limitato)
(compatto)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora

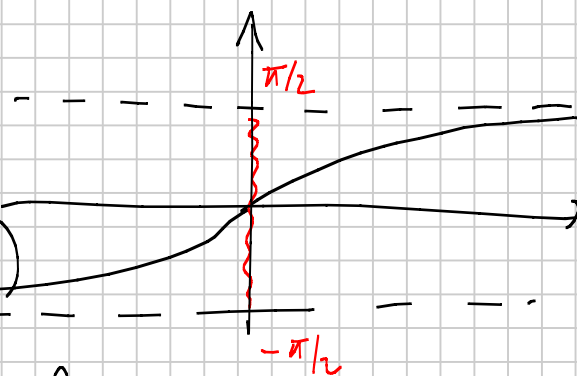
i) $\exists \max_{[a, b]} f =: M$ e $\min_{[a, b]} f =: m$

ii) $f([a, b]) = [m, M]$



$\arcsin x$

$\text{Im } \arcsin x = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



in questo caso non $\exists M$ e m
ma solo $\sup f$ e $\inf f$.

$f: [a, b]$ continua

$\exists M = \max_{[a, b]} f \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b]$
 $f(x_0) = M$

$x_0 =$ punto di massimo, $M =$ massimo
di f .

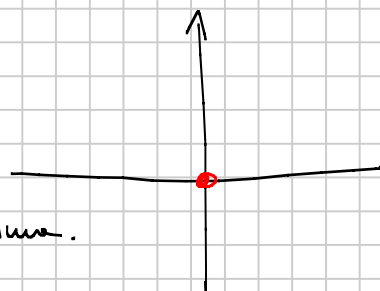
$\exists m = \min_{[a, b]} f \Rightarrow \exists x_1 \in [a, b]$
 $f(x_1) = m$

$x_1 = \text{posto di minimo.}$ $m = \text{minimo di } f$

Funzioni estendibili per continuità

es. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Dominio = $\{x \neq 0\}$
 f è continua.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

dominio di $\tilde{f}$ è $\mathbb{R}$.

Domanda: $\tilde{f}$ è continua in $\mathbb{R}$?

se $x \neq 0$

sì!

in $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}(x) = 1$$

cioè $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\tilde{f}(x)$ è continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

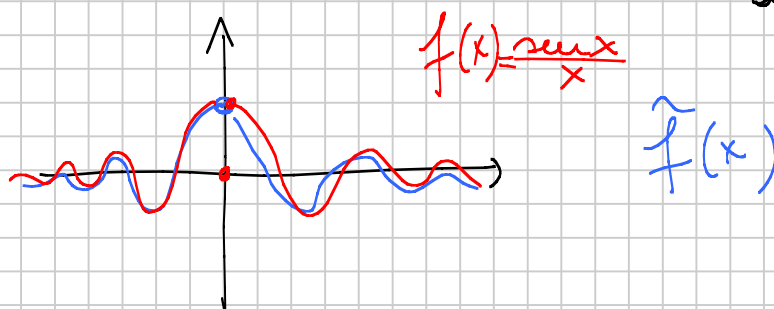
definita su
 $x \neq 0$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \\ 1 \end{cases}$$

$x \neq 0$

$x = 0$

è la
estensione
per continuità
della f



In generale se $f(x)$ non è definita in $x = x_0$ ma $\exists$ finito $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ allora $f(x)$ si può estendere (più spesso) per continuità definendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

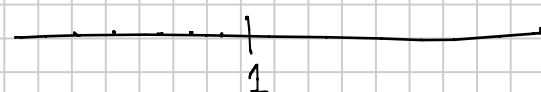
es. $\frac{\log(1+x)}{x} \quad x \neq 0$

si può prolungare per continuità in $x=0$

ponendo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

es. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

vedere se f è continua dove è definita.
dominio $f = \mathbb{R}$

$x > 1$ f è continua 
 $x < 1$ f è continua

$x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$

per $x < 1$ la funzione è def. in un modo e per $x > 1$ in un altro:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x^2) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \Rightarrow f$ è continua in $x=1$

f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

es.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(x+2)} - 1}{x+2} & \text{se } x < -2 \\ ax & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

Trovare il valore di $a \in \mathbb{R}$ t.c.
la funzione $f(x)$ sia continua in
tutto $\mathbb{R}$.

Domínio di $f = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} | \\ -2 \end{array}$$

$\forall x < -2$ la f è continua

$\forall x > -2$ " "

vediamo se è continua in $x = -2$

? $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = -2a$?

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^{(x+2)} - 1}{x+2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow -2^+} ax = -2a$

$x+2=y$
 $\xrightarrow{-2}$
 $x < -2 \quad x+2 < 0$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \exists \Leftrightarrow 1 = -2a = f(-2)$

$\Downarrow$

$a = -\frac{1}{2}$

$\text{se } a = -\frac{1}{2}$

$\exists \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$

cioè la funzione è continua
anche in $x = -2$

Es.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{a}{1-x^2}} & x > 1 \\ (\sin a)|x-1| + b & x \leq 1 \end{cases}$$

Det. a e b t.c. $f(x)$ ~~è~~ continua nel suo dominio.

Dominio = $\mathbb{R}$

$x > 1$ continua

$x < 1$ continua

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin a |x-1| + b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{a}{1-x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a}{1-x^2} \rightarrow 0^- = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$1-x^2 < 0$ se $x > 1$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{a}{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b \iff \begin{cases} b = 0, a > 0 \\ b = 1, a = 0 \end{cases}$$

se $a < 0$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ ~~la~~ discontinuità di 2° specie
 in $x = 1$, $\forall a < 0$ e $\forall b$.