

Lezione del 6 Ottobre

Bertsch - Dal Passo - Graedel

Capitolo 1

Insiemi A, B, X maiuscole
elementi insieme a, b, x $a \in A$

Per rappresentare un insieme

$$A = \{a, b, c\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\{a\}, a$$

Altro modo di rappresentare un insieme
con i predicati

$$D := \{n \in \mathbb{N} : \underbrace{n \text{ è dispari}}_{\downarrow p(x)}\} =$$

$$= \{n \in \mathbb{N} : n = 2k+1, k \in \mathbb{N}\}$$

$$P := \{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

Simboli

$\forall$ per ogni

$\exists$ esiste

$\nexists$ non esiste

$\exists!$ esiste ed è unico

$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

$\in$, ϕ

$A = B$ se contengono gli stessi elementi

$$\begin{cases} a \in A \Rightarrow a \in B \\ b \in B \Rightarrow b \in A \end{cases}$$

$A \subseteq B$ A sottinsieme di B

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$



$A \subset B$ sottinsieme proprio di $A \subseteq B$
 $A \neq B$

operazioni insiemistiche

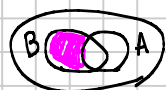
$$A, B \subseteq U$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$



$$B \setminus A = \{x : x \in B \text{ e } x \notin A\}$$



$$\text{se } A \subseteq B$$



$$B \setminus A = \complement_B A$$

Proprietà

$$\complement(\complement A) = A \quad \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

U insieme

$\mathcal{P}(U)$ = insieme delle parti di U

$$= \{ \text{sottinsiemi di } U \}$$

es. $U = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(U) = \{ \emptyset, U, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\} \}$$

Coppia ordinata e insieme prodotto cartesiano

A, B insiemi

$$(a, b), a \in A, b \in B,$$

↓ COPPIA ORDINATA

$$(a, b) \neq (b, a)$$

$$(a, b) \stackrel{\text{NON}}{\text{COMPON}} \text{ DERE! } \{a, b\} = \{b, a\}$$

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow \begin{matrix} a = a' \\ b = b' \end{matrix}$$

$$A \times B := \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

INSIEME
prodotto cartesiano

$$A \times B \neq B \times A \text{ se } A \neq B$$

es. $A = \{0, 1\}$

$$B = \{2, 3\}$$

$$A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}$$

$$B \times A = \{(2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$$

se $A = B$

$$A \times A = A^2$$

$$A_1, A_2, \dots, A_n \quad n \text{ insiemi}$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) :$$

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n \} =$$

$\downarrow$
 n -ple

$$= \{ (a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \dots, n \}$$

Se gli A_i sono tutti uguali A_1^m

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (m_1, m_2) : m_i \in \mathbb{N} \}$$

$i = 1, 2$

$$\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (m_1, m_2, m_3) : m_i \in \mathbb{N} \}$$

$i = 1, 2, 3$

Logica elementare

Metodi di dimostrazione

Proposizioni

① $\forall x \in A \quad p(x) \Rightarrow q(x)$

è equivalente

$$\forall x \in A \quad \text{non } q(x) \Rightarrow \text{non } p(x)$$

es. $\forall n \in \mathbb{N}$ n dispari $\Rightarrow$ n^2 è dispari

Dim. Hp $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{TS} \quad n^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 1 + 4k \\ &= \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{\text{dispari}} = 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Siccome ho dimostrato

$$\boxed{\begin{array}{ccc} n \text{ dispari} & \Rightarrow & n^2 \text{ è dispari} \\ p(x) & \Rightarrow & q(x) \end{array}}$$

non $q(x) = n^2$ è pari

non $p(x) \Rightarrow n$ è pari

ho anche dimostrato che

$$\begin{array}{c} \text{se } \boxed{n^2 \text{ è pari} \Rightarrow n \text{ è pari}} \\ \text{non } q(x) \Rightarrow \text{non } p(x) \end{array}$$

②

Per dimostrare la falsità di una implicazione $\Rightarrow$ controesempio

$$\forall x \in A \quad p(x) \Rightarrow q(x)$$

Se trovo $\bar{x} \in A$ t.c. $p(\bar{x}) \not\Rightarrow q(\bar{x})$

ho dim. la falsità dell'implicazione

es. $\forall n \in \mathbb{N}$, n primo $\Rightarrow n$ è dispari

$n=2$ è primo ma non è dispari
quindi l'implicazione è falsa.

3) Negazione di una proposizione

$\forall x$ vale $p(x)$ è

$\exists \bar{x}$: non vale $p(\bar{x})$.

$\forall x$ vale $p(x)$ e $q(x)$

$\exists \bar{x}$: non vale $p(\bar{x})$ o non vale $q(\bar{x})$

Insieme numerici

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ interi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
 p e q sono primi tra di loro

cioè non sono divisibili per uno stesso numero intero > 1

non identificano $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\frac{2}{4} \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

operazione su un insieme X qualsiasi

$X \times X \rightarrow X$ associa ad una coppia uno e un solo elemento di X

X è un insieme numerico se in esso sono definite due operazioni: addizione e moltiplicazione che devono soddisfare certe proprietà.

$\mathbb{Q}$ è un insieme numerico con le operazioni usuali

addizione: 1) commutativa, 2) associativa

3) $\exists!$ zero 4) $\exists!$ opposto

moltiplicazione 5) commutativa, 6) associativa

7) $\exists!$ unità, 8) $\forall x \neq 0 \exists!$ reciproco

addizione + moltiplicazione 9) Distributiva

Se valgono 1) - 9) l'insieme è un campo.

$\mathbb{Q}$ è un campo. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ no!

Campo ordinato: è definita una relazione d'ordine $\leq$

ordine totale: $\forall x, y \in X$ vale sempre
 $x \leq y$
o $y \leq x$

Proprietà

$$10) \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

$$11) \quad x \leq y, \quad z \geq 0 \quad xz \leq yz$$

disuguaglianze strette

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$

Proprietà delle disuguaglianze (libro)

es. $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$$

$$x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$$