

Lezione del 7 Ottobre

Insiemi numerici

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

due operazioni: addizione + moltiplicazione
relazione d'ordine $\leq$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \begin{array}{l} p \text{ e } q \text{ primi} \\ \text{tra di loro} \end{array} \right\}$$

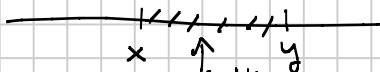
Proprietà di densità di $\mathbb{Q}$

$\forall x, y \in \mathbb{Q}, x < y \exists$ infiniti
 $z \in \mathbb{Q}, x < z < y$

oss. la proprietà

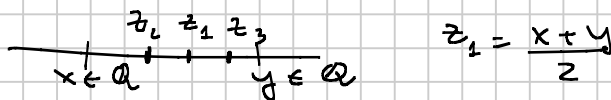
di densità non vale in $\mathbb{Z}$

cioè se $x, y \in \mathbb{Z}, x < y$
 $\nexists z \in \mathbb{Z} : x < z < y$



infiniti
numeri razionali

Dim.



$$z_1 = \frac{x+y}{2}$$

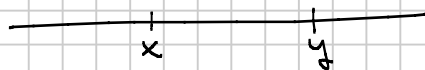
$$\frac{x+z_1}{2} = z_2$$

$$\frac{y+z_1}{2} = z_3$$

iterando
se ne trovano ∞

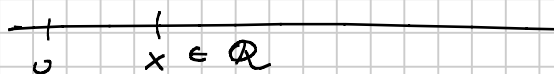
Proprietà di Archimede

$\forall x, y > 0, x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$
t.c. $nx \geq y$



Dim. no, anche se semplice

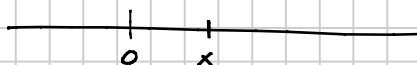
Applicazione 0 $\forall x > 0, x \in \mathbb{Q} \exists n > x$



Applicazione 1

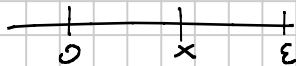
$x \geq 0$ t.c.
 $x \in \mathbb{Q}$

$$x < \varepsilon \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = 0$$



Dim Supp. in modo che $x \neq 0$

allora $x > 0$



ipotesi $x < \epsilon \quad \forall \epsilon$

per la proprietà di Archimede $\exists n \in \mathbb{N}$

t.c. $n x > \epsilon, \Rightarrow x > \frac{\epsilon}{n}$

contraddizione
 $x < \epsilon, \forall \epsilon!$

$\Rightarrow x = 0$

I numeri razionali si possono rappresentare
come numeri decimali

1) limitati del tipo $x \in \mathbb{Q}$

$x = \pm p, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, $p, \alpha_i \in \mathbb{N}$
oppure $0 \leq \alpha_i \leq 9$

2) periodici

$x = \pm p, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ blocco di
cifre,
detto PERIODO
che è ripetuto
indefinitamente

1) $x = 1, 25$

2) $x = 1, 252525 \dots = 1, \overline{25}$

periodo $\neq 9$

$x = 0, \overline{9}$

decimale periodico

proprio

il periodo $\neq 9$

Numeri reali $\mathbb{R}$

Un numero reale è un allineamento
decimale proprio, l'insieme
si indica con $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ contiene sia gli allineamenti
limitati o periodici, cioè contiene
 $\mathbb{Q}$

allineamenti
decimali
non limitati
e non periodici



$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} =$ numeri irrazionali

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è vuoto.
 ($\exists$ almeno un elemento $x \in \mathbb{R}$ m.t.c. $x \notin \mathbb{Q}$)

Prop. Non esiste $x \in \mathbb{Q}$ t.c.
 $x^2 = 2$.

Dim. Supponiamo per assurdo $\exists x \in \mathbb{Q}$,
 $x > 0 : x^2 = 2$

Siccome $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{p}{q}$ p, q interi
 primi fra di loro

$$x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

$\Rightarrow p^2$ è pari $\Rightarrow p$ è pari $\Rightarrow p = 2m$
 (vedi dim. di ieri!)

$$(2m)^2 = 2q^2 \quad \cancel{2} m^2 = \cancel{2} q^2$$

$q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow$ (vedi ancora ieri)
 q è pari $\Rightarrow$ quindi p e q sono entrambi PARI

quindi non possono essere
 primi fra di loro, perché
 hanno 2 come divisore
 comune! assurdo!

$\nexists$ numero $x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$.

Si estende a $\mathbb{R}$ la struttura di $\mathbb{Q}$.
 (addizione, moltiplicazione, $\leq$)

$\mathbb{R}$ è un campo

Valgono tutte le proprietà, per es.
 quelle di Archimede.

Proprietà di densità in $\mathbb{R}$

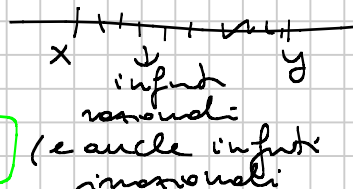
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $x < y$ allora

$\exists$ infiniti numeri razionali z

$$x < z < y$$

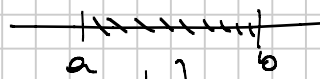
Si dice che

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ (e anche infiniti irrazionali)



Notazioni per intervalli

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$



$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$



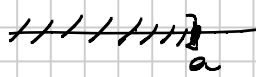
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$



$$(a, b]$$

intervalli
chiusi

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

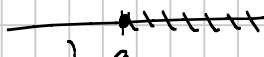


$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$



$$\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$

positivi (> 0)

$$\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$$

negativi (< 0)

valore assoluto o modulo di $x \in \mathbb{R}$

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

per def. $|x| \geq 0$

Disuguaglianze con $| \cdot |$

$$1) \boxed{|x| < a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) se $a < 0$
la disuguaglianza
non è mai
verificata

$$\text{es. } |x| < 1$$

$$|x| < -2$$

b) se $a = 0$ mai verificata

c) $a > 0$

$$\boxed{|x| < a}$$

$$|x| < a \Leftrightarrow \begin{cases} x < a & \text{e} & x \geq 0 \\ -x < a & \text{e} & x < 0 \\ (x > -a) \end{cases}$$

$$-a < x < a$$

2) $|x| > a$

Es. $|x| > 82$

2) $|x| > -7$

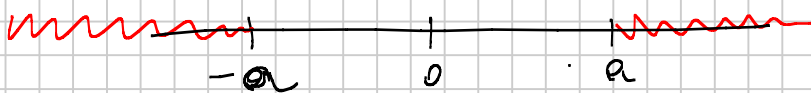
3) $|x| > 0$

α) $a < 0$, verifique $\forall x \in \mathbb{R}$.

β) $a = 0 \Rightarrow |x| > 0$ verifique $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

γ) $a > 0$

$$|x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a & \text{e} & x \geq 0 \\ -x > a & \text{e} & x < 0 \\ (x < -a) \end{cases}$$



$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ e } x < -a$$

$$\Leftrightarrow (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$$

Es. $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Analogamente

Es. $|x-3| < 1 \Leftrightarrow$

$$-1 < x-3 < 1$$

$$2 < x < 4$$

Es. $|x-3| > 1$

$$x-3 > 1$$

$$x-3 < -1$$

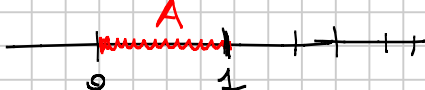
$$x > 4$$

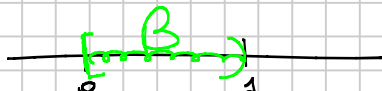
$$x < 2$$

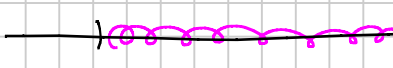
MAGGIORANTE, MINORANTE, ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

Def. $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

$k \in \mathbb{R}$ si dice MAGGIORANTE di A in $\mathbb{R}$ se $a \leq k, \forall a \in A$.

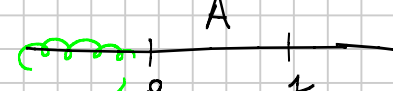
Es. $A = [0, 1]$ 
in questo caso
tutti i numeri ≥ 1 sono
maggiorenti

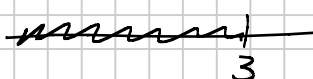
$B = [0, 1)$ 
anche in questo caso
tutti i numeri reali ≥ 1
sono
maggiorenti

$C = [0, +\infty)$ 
non ha
maggiorenti

Def. se $\exists$ almeno un maggiorente
dico che A è limitato superiormente

$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$
Def. $k \in \mathbb{R}$ è MINORANTE di A
in $\mathbb{R}$ se $k \leq a, \forall a \in A$

es. $A = [0, 1]$ 
tutti i numeri ≤ 0 sono
minoranti

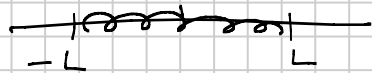
es. $D = (-\infty, 3]$ 
non ha
minoranti

Def. A è limitato inferiormente
se $\exists$ almeno un minorante

Def. A è LIMITATO se è limitato
inferiormente e superiormente

$A = [0, 1]$ è limitato

$\rightarrow A$ è limitato se $\exists L$ t.c. $|a| \leq L$
 $\forall a \in A$



Def. Un maggiorante di $A \subseteq \mathbb{R}$
 che appartiene ad A si dice
MASSIMO (un minorante di A
 che appartiene ad A si dice
MINIMO) e m indice con
 $\max A$ (o $\min A$).

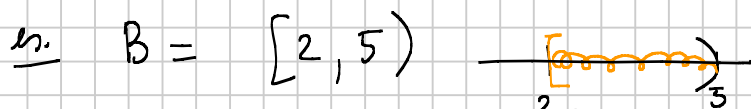


1 è un maggiorante, $\in A$

$$1 = \max A$$

0 è un minorante

$$\text{che } \in A \Rightarrow 0 = \min A$$



B non ha massimo poiché $5 \notin B$
 anche se B è limitato superiormente

In forma compatta si scrive con:

$$M = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ M \geq a, \forall a \in A \end{cases}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}$$

$$m = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ m \leq a, \forall a \in A \end{cases}$$

Prop. se $\exists \max A$ (o $\min A$)
 questo è unico.

Dim. sup. di $\exists$ due max

m_1 e m_2

$$m_1 \text{ è } \max A \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \in A \\ m_1 \geq a, \forall a \in A \end{cases}$$

$$m_2 \text{ è } \max A \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 \in A \\ m_2 \geq a, \forall a \in A \end{cases}$$

$m_1 \in A$, poiché m_2 è più grande

di quel non elemento di A

$m_2 \geq m_1$ e cioè $m_2 \in A$

$m_1 \geq m_2 \Rightarrow m_1 = m_2$ #

Def. A è limitato superiormente

$\exists k \in \mathbb{R} : a \leq k, \forall a \in A$

Def. A non è limitato superiormente

$\forall k \in \mathbb{R} \exists a \in A$ t.c. $a > k$

Esercizi disequazioni con valori assoluti

Es.

$x \neq 3$

$x \neq 0$

$$\frac{1}{x-3} \leq \frac{1}{2|x|}$$

1) $x > 0$ $\frac{1}{x-3} \leq \frac{1}{2x}$ $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{2x} \leq 0$

$$\frac{2x - x + 3}{(x-3)2x} \leq 0$$

$$\frac{x+3}{(x-3) \cdot 2x} \leq 0$$

già che per $x > 0$

$x+3 > 0 \Rightarrow \boxed{x < 3}$
 $x > 0$

2) $x < 0$ $\frac{1}{x-3} \leq \frac{1}{2(-x)}$

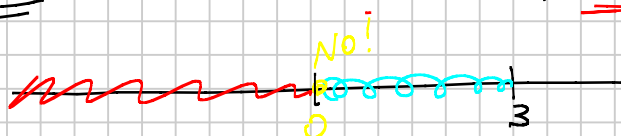
$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{2x} \leq 0$$

$$\frac{2x + x - 3}{(x-3)2x} \leq 0 \Rightarrow \frac{3x-3}{\underbrace{(x-3)}_{<0} \underbrace{2x}_{<0}} \leq 0$$

deve essere

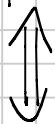
$$3(x-1) \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$x < 0$ deve essere $x \leq 1 \Rightarrow \underline{\underline{\forall x < 0}}$



la soluzione è $x < 3, x \neq 0$.

Es. $\left| \frac{x-5}{x+2} \right| \leq 1$

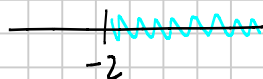


$$-1 \leq \frac{x-5}{x+2} \leq 1 \quad (x \neq -2)$$

1) $\frac{x-5}{x+2} \leq 1 \quad \frac{x-5}{x+2} - 1 \leq 0$

$$\frac{\cancel{x}-5-\cancel{x}-2}{x+2} \leq 0 \quad \frac{-7}{x+2} \leq 0$$

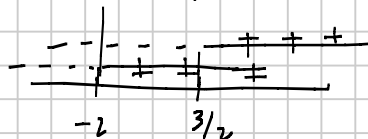
$$\frac{7}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x > -2$$



2) $\frac{x-5}{x+2} \geq -1$

$$\frac{x-5}{x+2} + 1 \geq 0 \quad \frac{x-5+x+2}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2x-3}{x+2} \geq 0$$



$$\Downarrow \\ x < -2 \quad \text{or} \quad x \geq 3/2$$

1) $\cap$ 2) 1)

2)

l'intersection de

$$x \geq 3/2$$

$$\left[\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

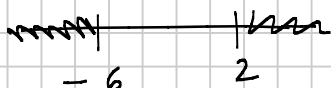
es. $\left| |x+2| - 3 \right| > 1$

$$|y| > 1 \Leftrightarrow \begin{matrix} y > 1 \\ y < -1 \end{matrix}$$

1) $|x+2| - 3 > 1$

2) $|x+2| - 3 < -1$

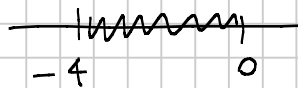
1) $|x+2| > 4$ $\begin{cases} x+2 > 4 \Rightarrow x > 2 \\ x+2 < -4 \Rightarrow x < -6 \end{cases}$



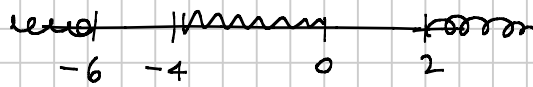
$$2) |x+2| - 3 < -1$$

$$|x+2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+2 < 2$$

$$-4 < x < 0$$



1) $\cup$ 2)



$$(-\infty, -6) \cup (-4, 0) \cup (2, +\infty)$$