

Lezione del 8 Ottobre

$$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$$

$$M = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ M \geq a, \forall a \in A \end{cases}$$

$$m = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ m \leq a, \forall a \in A \end{cases}$$

es. $A = [0, 1]$ $M = 1, m = 0$

$B = (0, 1]$ 0 minore di B
ma $0 \notin B$

Insieme dei minori di $B = (-\infty, 0]$



0 è il più grande dei minori

$C = [0, 1)$ maggiore di C
 $= [1, +\infty)$

$1 \notin C$ ma è il più piccolo dei maggiore

Def. $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

$p \in \mathbb{R}$ si dice ESTREMO SUPERIORE di A in $\mathbb{R}$ e si indica con $\sup A$ se p è il minimo dei maggiore di A .

Analogamente p è ESTREMO INFERIORE di A in $\mathbb{R}$ e si indica con $\inf A$ se p è il massimo dei minori.

es. $A = (0, 1)$

$\{\text{Minori}\} = (-\infty, 0]$ il + grande

$\inf A = 0$

$\{\text{Maggiore}\} = [1, +\infty)$ il + piccolo

$\sup A = 1$

Prop. se $\exists \sup A$ questo è unico
Dim. Infetto $\sup A = \min \{ \text{maggioranti} \}$
 e ieri abbiamo dim. che se $\exists$ il
 min di un insieme questo è unico.
 #

oss. se $\exists \max A$ allora

$$\sup A = \max A$$

es. $A = [0, 1]$

Invece può succedere che $\exists \sup A$
 ma non il max A . ($A = (0, 1)$)

Notazione

A non è limitato superiormente

scrivo $\sup A = +\infty$

(non limitato inferiormente $\inf A = -\infty$)

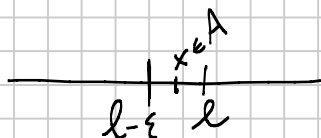
es. $\mathbb{Z}$ $\sup \mathbb{Z} = +\infty$
 $\inf \mathbb{Z} = -\infty$

$\forall k \in \mathbb{Z} \exists n \in \mathbb{N} : n > k$
 (per la proprietà di Archimede)

Caratterizzazione di $\sup$ e $\inf$ di A

$A \subseteq \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$

$l = \sup A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A : x \leq l \quad (\text{è maggiorante}) \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \text{ t.c.} \\ x > l - \varepsilon \end{array} \right.$



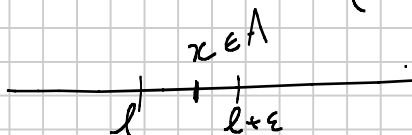
(l è il + piccolo dei maggioranti)

es. $A = (0, 1)$

$1 = \sup A$

Analogamente

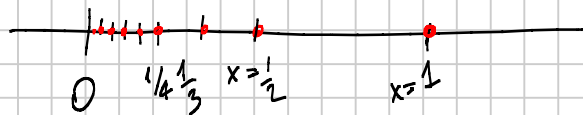
$l = \inf A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A : x \geq l \quad (\text{è minorante}) \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \text{ t.c.} \\ x < l + \varepsilon \end{array} \right.$



(l è il + grande dei minoranti)

Esempio

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$



Sciammo che A è limitato sia superiormente che inferiormente. Per tutti i numeri > 1 sono maggiori di A e tutti i numeri < 0 sono minori di A .

Congettura

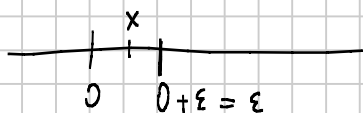
$$\begin{aligned} 1 &= \max A \\ 0 &= \inf A \end{aligned}$$

$$A = \left\{ x = \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$$

$$1 = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \in A & \text{vero, si prende } n=1 \\ 1 \geq x, \forall x \in A \end{cases}$$

$$1 \geq \frac{1}{n} \Rightarrow n \geq 1 \quad \text{vero!}$$

$$0 = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq 0 \\ (2) \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \text{ t.c. } x < \varepsilon \end{cases}$$



$$A = \left\{ x = \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$$

$$1) \quad \frac{1}{n} \geq 0 \quad \text{vero!}$$

2) devo trovare $x \in A$: $x < \varepsilon$ cioè devo trovare un n t.c. $x = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \boxed{n > 1/\varepsilon}$$

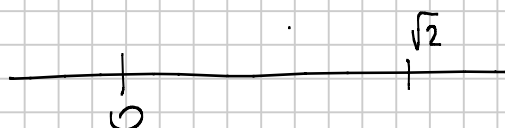
prendendo un qualunque $n > 1/\varepsilon$ trovo che il corrispondente

$$x < \varepsilon$$

Oss. tutto si basa sulla risoluzione di una disequazione in "n" e in generale in x.

Esempio OKKIO! se non siamo in $\mathbb{R}$ ma per es. in $\mathbb{Q}$

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2, x \geq 0 \}$$



$$\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2 \quad \text{Il numero } x \text{ t.c. } x^2 = 2 \quad x = \sqrt{2}$$

A è limitato ma non ha sup in $\mathbb{Q}$

invece ha estremo sup in $\mathbb{R}$.

Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$

$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Se A è limitato superiormente (o inferiormente) allora esiste $\sup A \in \mathbb{R}$ ($\inf A \in \mathbb{R}$)

Con tale proprietà siamo sicuri che $\exists \sup \{ x \in \mathbb{R}, x > 0 : x^2 < 2 \} = \sqrt{2}$.
L'esistenza dei radici è garantita dall'assioma di completezza

Sommatore, fattoriali, coefficienti binomiali

Sommatorie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{100} = \sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{n=2}^{100} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=n_0}^n a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_n$$

es. $\sum_{n=0}^3 \frac{n}{n+1} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

si può fare anche un cambio di indice

$$n+1 = k \quad n = k-1$$

$$\sum_{k=1}^4 \frac{k-1}{k}$$

Fattoriale

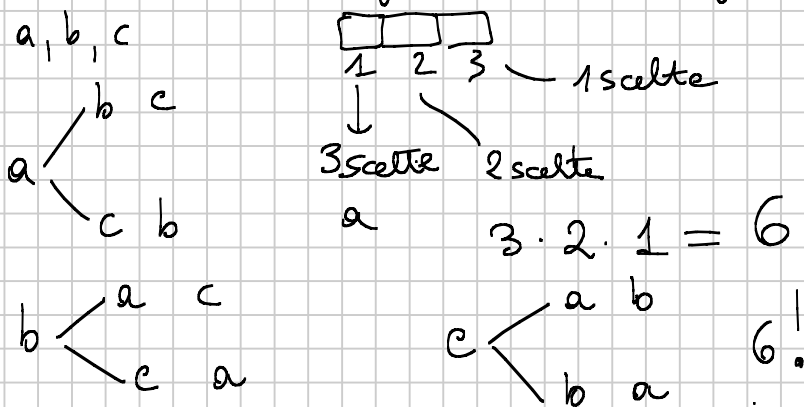
$$n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \\ 1! = 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

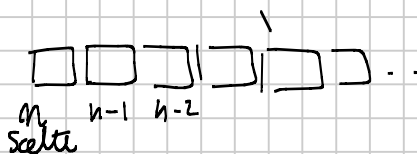
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

representa le disposizioni di n oggetti

a, b, c



n oggetti



$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Coefficienti binomiali

$$n, k \in \mathbb{N}$$

$$k \leq n$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

coefficiente binomiale
di indici n e k

$$\text{es. } \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} \quad \begin{matrix} n=4 \\ k=2 \end{matrix}$$

$$= 6$$

representano il numero di combinazioni di n oggetti presi a k.

Es. 4 oggetti presi 2 a 2
 $n=4$ $k=2$

a b c d, (non ordinati)

a b a c a d b c b d c d

$$\text{n° di combinazioni } = \binom{4}{2} = 6$$

Per calcolare i coefficienti binomiali
si usa il triangolo di Tartaglia