

Lezione del 9 Ottobre

password
per Moodle

1 A M pari

Fattoriale $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

Coefficienti binomiali $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ si può calcolare con il triangolo di Tartaglia

$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$

$k=0$

$\binom{1}{0} = 1, \binom{1}{1} = 1$

$\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2, \binom{2}{2} = 1$

$\binom{3}{0} = 1, \binom{3}{1} = 3, \binom{3}{2} = 3, \binom{3}{3} = 1$

$\binom{4}{0} = 1, \binom{4}{1} = 4, \binom{4}{2} = 6, \binom{4}{3} = 4, \binom{4}{4} = 1$

Triangolo di Tartaglia

Triangolo di Tartaglia

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Attraverso il Triangolo di Tartaglia si calcolano i coefficienti delle potenze di un binomio $(a+b)^n$.

Formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$n=1 \quad (a+b) = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k =$$

$$n=2 \quad = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a+b$$

$$n=3$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\begin{aligned}
 n=2 \\
 (a+b)^2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = \\
 &= \underbrace{\binom{2}{0}}_{=1} a^2 + \underbrace{\binom{2}{1}}_{=2} a b + \underbrace{\binom{2}{2}}_{=1} b^2 = \\
 &= a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

$$(a+b)^{27} = \binom{27}{0} a^{27} + \binom{27}{1} a^{26} b + \binom{27}{2} a^{25} b^2 + \dots + \binom{27}{27} b^{27}$$

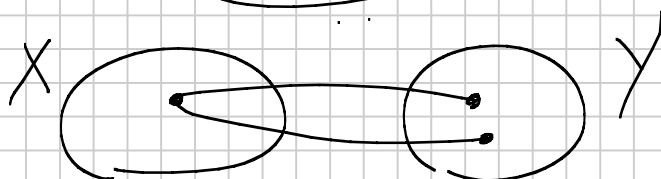
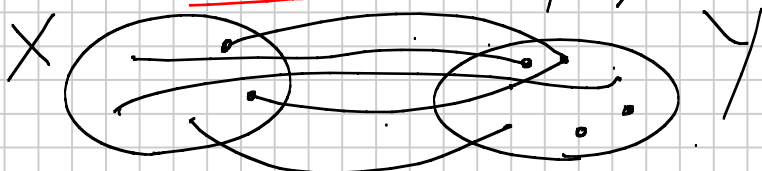
$\searrow \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \swarrow$
 si prendono dalle 28^a righe
 del Δ di Tartaglia

FUNZIONI

(Cap 2 BDG)

Def. X, Y insiemi non vuoti.

Una funzione f da X a Y è una corrispondenza che associa a ogni $x \in X$ uno e uno solo elemento $y \in Y$.



NO FUNZIONE

X = dominio della funzione $=: \text{dom } f$

Y = codominio

$$\begin{aligned}
 \text{im } f &= f(X) := \{f(x), x \in X\} \subseteq Y \\
 &= \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}
 \end{aligned}$$



IMMAGINE
di f

$$y : \exists x \in X : y = f(x)$$

y è detto Valore della funzione in x
e si scrive $y = f(x)$

$$f: X \longrightarrow y = f(x)$$

$$\text{graf } f := \left\{ (x, f(x)) : x \in X \right\}$$

GRAFICO DI $f \subseteq X \times Y$

Per indicare una funzione

$$\left\{ \begin{array}{l} f: X \longrightarrow Y \\ x \longrightarrow y \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} f: X \longrightarrow Y \\ y = f(x) \end{array} \right.$$

es. $f(x) = x^4$

$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \underbrace{x^4}_y \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
dominio codominio

$$\begin{aligned} \text{im } f &= \{ x^4, x \in \mathbb{R} \} = \\ &= \{ y \text{ t.c. } \exists x \in \mathbb{R} : y = x^4 \} = \\ &= [0, +\infty) \quad \text{cioè tutti gli } y \geq 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^4 \quad f: \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{dominio}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{codominio}}$$

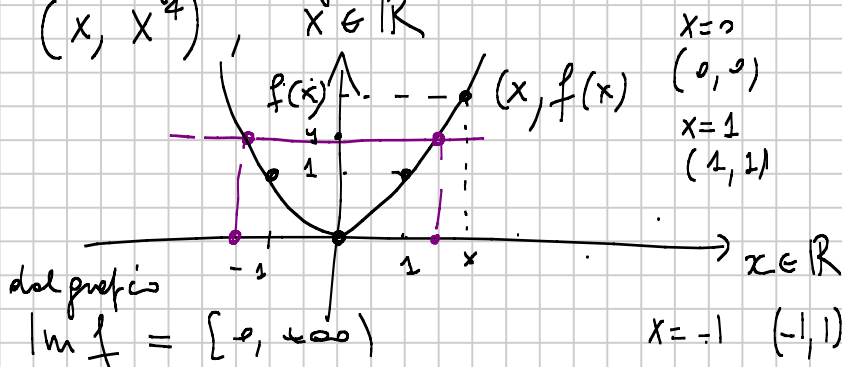
Immagine = $[0, +\infty)$

le cose importanti

da definire per una funzione sono
il dominio X e l'immagine $\text{im } f$

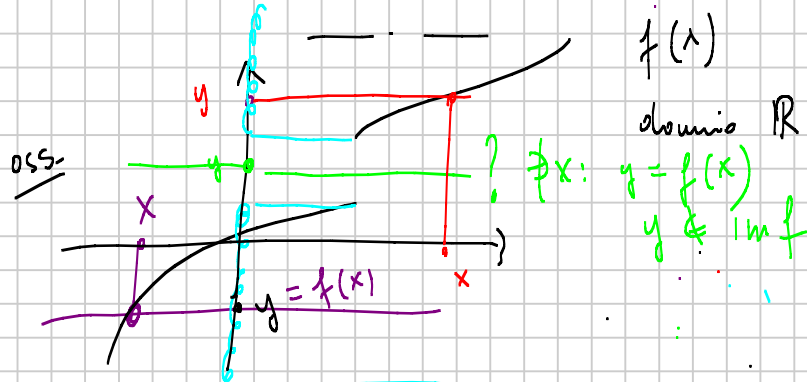
$$f(x) = x^4 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

per disegnare il grafico $(x, f(x)), x \in X$
 $(x, x^4), x \in \mathbb{R}$

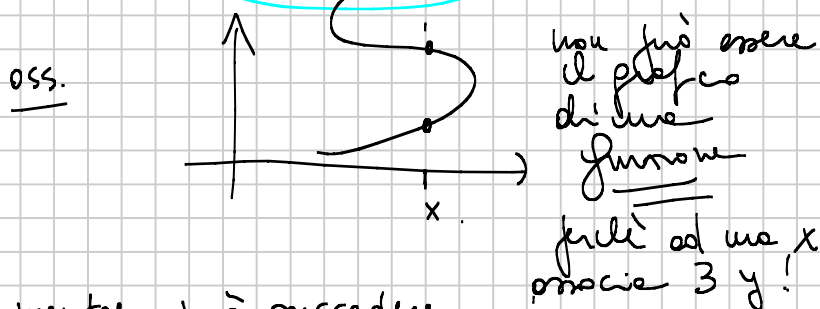


$$\forall y \geq 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } y = x^4$$

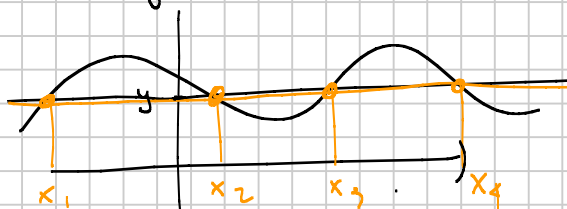
(addirittura ne esistono due).



$\text{Im } f =$ Insieme immagine



mentre può succedere



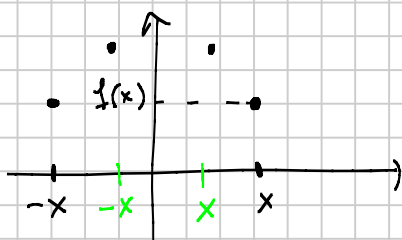
FUNZIONI SIMMETRICHE e PERIODICHE

$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

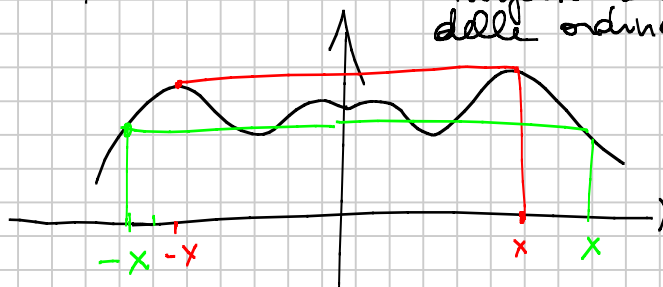
funzione a variabile reale ($x \in \mathbb{R}$)
a valori reali ($y = f(x) \in \mathbb{R}$)

f è PARI in X se $f(x) = f(-x)$
 $\forall x \in X$
($-x \in X$)

f è DISPARI in X se $f(x) = -f(-x)$
 $\forall x \in X$ ($-x \in X$)

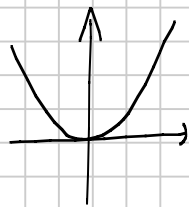


i grafici di
funzioni PARI
sono simmetrici
rispetto all'asse
delle ordinate (della y)



$$f(x) = x^4 \quad \text{è PAR}$$

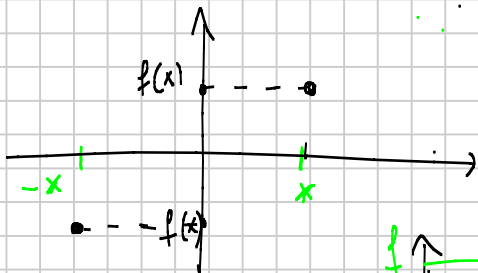
? $f(x) = f(-x)$?



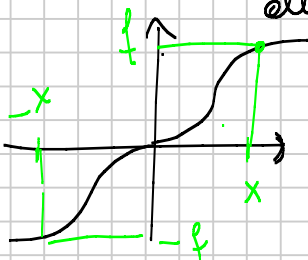
$$f(x) = x^4$$

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$$

f dispari $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$



i grafici
di funzioni
dispari sono
simmetrici
rispetto
all'origine

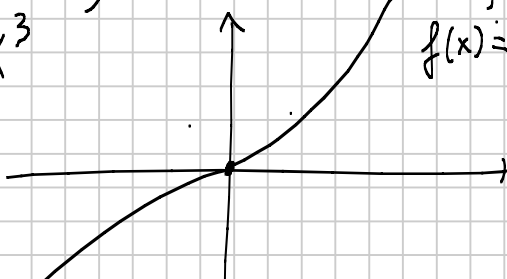


es. $f(x) = x^3$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

$$f(x) = x^3$$

grafico
simmetrico
rispetto
all'origine

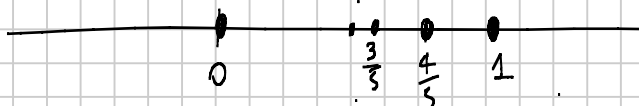


dominio $f = \mathbb{R}$

$\text{Im } f = \mathbb{R}$
 $(\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } y = x^3)$

Esercizi sup e inf, max e min
di insiem.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}, x = \frac{2n}{n^2+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$



$n=0$

$x=0$

$n=3$

$x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$n=1$

$x = \frac{2}{2} = 1$

$n=4$

$x = \frac{8}{17}$

$n=2$

$x = \frac{4}{5}$

$$0 = \min A \Rightarrow \text{per caso} \quad \begin{cases} 0 \in A \\ 0 \leq x, \forall x \in A \end{cases}$$

$$1 = \max A$$

$$? \Downarrow \begin{cases} 1 \in A \\ 1 \geq x, \forall x \in A \end{cases}$$

$$A = \left\{ x = \frac{2n}{n^2+1} \right\}$$

• $1 \in A$, si! juche per $n=1$ si ottiene $x=1$

• $1 \geq x, \forall x \in A$

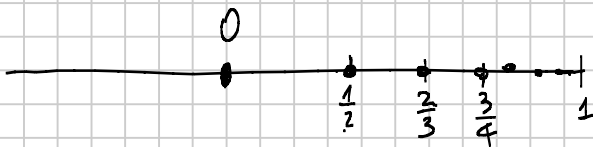
$$? \left| 1 \geq \frac{2n}{n^2+1} \right| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n^2+1 \geq 2n \quad (n-1)^2 \geq 0 \quad \text{uno } \forall n \in \mathbb{N}$$

$\rightarrow$ vero $\forall n$!

es.

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$



$$n=1 \quad x=0$$

$$n=2 \quad x = \frac{1}{2}$$

$$n=3 \quad x = \frac{2}{3}$$

$$x < 1$$

$$B = \left\{ x = \frac{n-1}{n} \right\}$$

un insieme di

$$0 = \min B \Rightarrow$$

$$1 = \sup B$$

Per caso

$$\begin{cases} 0 \in B \\ 0 \leq x \\ \forall x \in B \end{cases}$$

• $1 \geq x, \forall x \in B$

• $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in B \text{ t.c.}$

$$x > 1 - \varepsilon$$

• $? 1 \geq x \quad \forall x \in B$

$$? 1 \geq \frac{n-1}{n} \quad \forall n$$

$$\Rightarrow 1 \geq n-1$$

$0 \geq -1$ vero!
 $\forall n$

$$\frac{n-1}{n} > 1 - \varepsilon$$

$$n-1 \geq n(1-\varepsilon)$$

$$n - n(1-\varepsilon) \geq 1$$

$$x - x + n\varepsilon > 1$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

se prendo un
n di questo tipo
trovo la x

$$A.c. \quad x > 1 - \varepsilon$$

provate a dimostrare

$$\sup B = \frac{1}{2}$$

$$\sup B = \frac{1}{2}$$