

Esercizi.

Paola Mannucci e Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

16 ottobre 2014

Determinare estremo superiore e inferiore, e dire se sono massimo e minimo rispettivamente, dei seguenti insiemi:

1. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n + 4, n \in \mathbb{N}\}.$
2. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}.$
3. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = n^2 \cos(n\pi) - 1), n \in \mathbb{N}\}.$
4. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{xy}{x^2+y^2}, x, y \in \mathbb{R}, x < y\}$ (usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$).

Risolvere le seguenti disequazioni

1. $3\sin^2(x) + \cos^2(x) < 2 + \cos(x).$

2. $\arcsin\left(\frac{x}{x^2-1}\right) > \frac{\pi}{6}.$

3. $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+4} \leq 6.$

4. $\sqrt{\frac{9-x}{x+1}} > x+3.$

5. $|x+3| \leq \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Determinare dominio, segno, eventuali simmetrie e periodicità delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

1. $f(x) = \arccos(|x^3 - 1/2|)$.
2. $f(x) = \log(\sin(2e^x))$.
3. $f(x) = \log(\sin(e^{2x} - 4e^x + 4))$.
4. $f(x) = \arcsin\left(\frac{|x+2|}{x}\right)$.
5. $f(x) = \frac{1}{|x+1|-2}$.
6. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{\tan(x)}}$.
7. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\cosh(\sin x)}\right)$.
8. $f(x) = \arctan(\sqrt{4e^{2x} - 9e^x + 2} - 2e^x)$.
9. $f(x) = \log(4\sinh^2(x) - 5\sinh(x) + 1)$.
10. $f(x) = \frac{\log \sin(x)}{\sin(x)-1}$.
11. $f(x) = \arccos|x+1| - 6 - \frac{\pi}{3}$.
12. $f(x) = \log(1 - (x+1)^{x^2-1})$ (solo dominio).
13. $f(x) = \log(\cosh^2(x) - 4\cosh(x) + 5)$ (solo dominio).

- Utilizzando il criterio del rapporto mostrare che

1. $\lim_n \frac{b^n}{n!} = 0;$

2. $\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0;$

3. se $b > 1$ allora $\lim_n \frac{n^\alpha}{b^n} = 0;$

- Calcolare al variare di α il limite

$$\lim_n \frac{\alpha^{n+1} + n^2 + (-1)^{n+1}}{\pi^n - 2n^3 - 2 \sin(n)}$$

- Calcolare

1. $\lim_n \frac{n}{(\sqrt{n})^n};$

2. $\lim_n \frac{n^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^n};$

3. $\lim_n \frac{2^n}{e^{n^2}};$

4. $\lim_n \frac{4e^n - \cosh^2(n)}{\cos(n) + e^{n^2}}.$