

4 Dicembre 2013

Integrali generalizzati

manca una delle 2 ipotesi con le quali
abbiamo definito $\int_a^b f(x) dx$

es. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

$\frac{1}{x}$ non è limitato in $(0,1]$



es. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$



che $\frac{1}{x}$ è
limitato
ma l'intervallo
 $(1, +\infty)$ è illimitato

Integrazione di funzioni non limitate

$f(x)$ continua in $[a, b)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$

$$\int_a^b f(x) dx =: \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$



$\& \exists$ finito limite $\Rightarrow f$ è integrabile in $[a, b)$
oppure che l'integrale converge

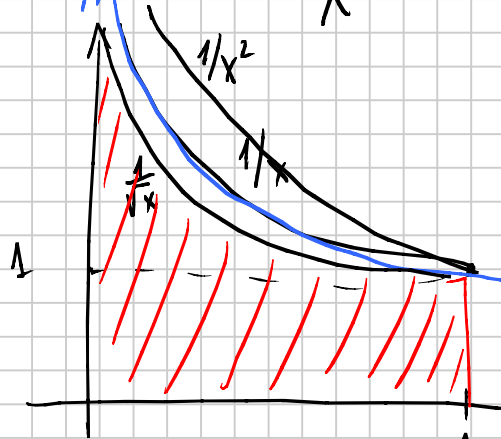
$\& \text{limite} = \pm \infty \Rightarrow$ l'integrale diverge

$\& \text{limite} \nexists \Rightarrow$ l'integrale $\nexists$.

Analogamente


$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx.$$

l'ini $f(x) = \frac{1}{x^d}$ in $(0,1)$ $d > 0$



area rossa = n° finito.

$$f(1) = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = +\infty$$

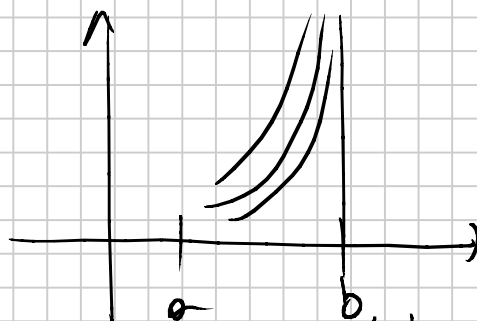
$1/x$ è lo "sporti traffico"

$$\int_0^1 \frac{1}{x^d} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-d} & \text{se } d < 1 \\ +\infty & \text{se } d \geq 1 \end{cases}$$

Tutto dipende dall'ordine di infinito di $\frac{1}{x^d}$.

In generale

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^d}$$



$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^d} dx = \begin{cases} \text{converge a } \frac{(b-a)^{1-d}}{1-d} & d < 1 \\ \text{diverge se } d \geq 1 \end{cases}$$

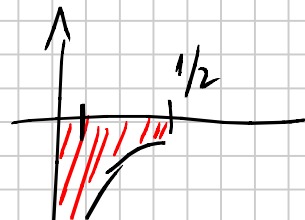
e analogamente

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^d} dx = \begin{cases} \text{converge} & d < 1 \\ \text{diverge} & d \geq 1 \end{cases}$$



$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0^-$$



$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log |\log x|}{\frac{1}{x}} \bigg|_{x=\epsilon}^{x=1/2} =$$

$$\log x = y \quad \frac{1}{x} dx = dy$$

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{y} dy = \log |\log x|$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\log \left| \log \frac{1}{2} \right| - \log |\log \epsilon| \right)$$

$$= -\infty$$

Quindi $\int_0^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx = -\infty$

cioè l'integrale
DIVERGE

$$f(x) = \frac{1}{x \log x} \quad \text{non è integrabile}$$



In generale vale

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta} dx$$

converge in $(0, \frac{1}{2})$

se $\alpha < 1 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha = 1 \quad \forall \beta > 1$

es. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x} |\log x|^{1000}} dx$

converge

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x |\log x|^2} dx$$

converge

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x |\log x|^{1/2}} dx$$

diverge

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^2 |\log x|^{1000}} dx$$

diverge

Criteri di integrabilità per $f \geq 0$.

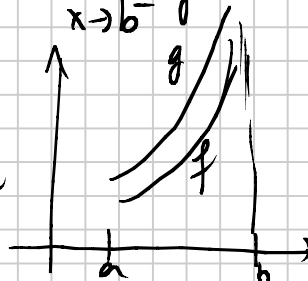
(cioè non cambiano segno in $[a, b)$).

Criterio del confronto

$f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\lim_{x \rightarrow b^-} f = \lim_{x \rightarrow b^-} g = +\infty$

Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$

Se g è integrabile in $[a, b) \Rightarrow f$ è integrabile in $[a, b)$



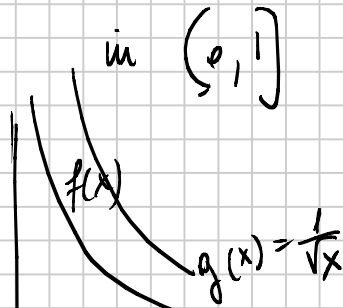
Se f non è integrabile in $[a, b) \Rightarrow g$ non è integrabile in $[a, b)$

Dim. no.

esemp: $\frac{1}{x^2}$ funzioni compare

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$



Vediamo se è integrabile in $(0, 1)$

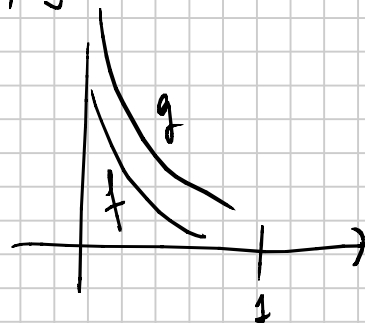
Cerco una $g(x) \geq f(x)$ che sia integrabile

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$$

Applico il criterio del confronto $\Rightarrow$ poiché $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in $(0, 1] \Rightarrow$ anche $f(x)$ è integrabile in $(0, 1]$.

es. $g(x) = \frac{(\sin^2 x + 1)}{x^5}$ in $(0, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin^2 x + 1)}{x^5} = +\infty$$



$$\underbrace{\frac{(\sin^2 x + 1)}{x^5}}_g$$

$$\underbrace{\frac{1}{x^5}}_f$$

$\frac{1}{x^5}$ non è integrabile in $(0, 1]$

$\Rightarrow g$ non è integrabile in $(0, 1]$

$(0,1)$ per il confronto con $\frac{1}{x^5}$.

Criterio del confronto asintotico

$$f, g \geq 0 \quad e \quad f \sim g, \quad x \rightarrow b^- \quad \left(f, g \rightarrow +\infty \right. \\ \left. x \rightarrow b^- \right)$$

f è integrabile $\Leftrightarrow g$ è integrabile

(analog. se $x \rightarrow a^+$)

es. $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$

$x \rightarrow 0^+ \quad \sin x = x + o(x)$

$\sin x \sim x \quad x \rightarrow 0^+$

$\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x} \quad x \rightarrow 0^+$

$f \sim g$

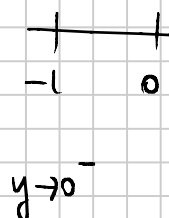
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty$



dal principio del confronto asintotico, poiché $\frac{1}{x}$ non è integrabile in $(0,1) \Rightarrow$ anche $\frac{1}{\sin x}$ non è integrabile in $(0,1)$.

es. $\int_2^3 \frac{1}{\sin(x-3)} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sin y} dy$

$z-3=y$
 $dz=dy$



$$\sin y \sim y \quad \frac{1}{\sin y} \sim \frac{1}{y} \quad \frac{1}{y} \text{ non è integrabile in } [-1, 0)$$

$$\frac{1}{\sin(x-3)}$$

non è integrabile tra $[2, 3)$.

$$\text{es} \int_0^1 \frac{1}{(e^x - 1)^2} dx$$

$$f(x) \geq 0$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ as } x \rightarrow 0^+$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$e^x - 1 = x + o(x)$$

$$(e^x - 1)^2 = x^2 + o(x^2)$$

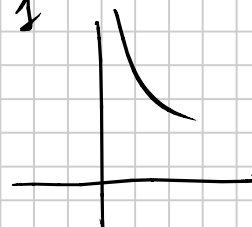
$$(e^x - 1)^2 \sim x^2$$

$$\frac{1}{(e^x - 1)^2} \sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow \text{non è integrabile in } (0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{(e^x - 1)^2} dx \text{ diverge}$$

$$\text{es} \int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} = +\infty$$



$$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

$$x \rightarrow 0$$

$$e^{\sqrt{x}} - 1 = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

$$e^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x} \text{ as } x \rightarrow 0^+$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

perché $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integ. in $(0,1) \Rightarrow \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1}$ è integ. in $(0,1)$

$$\frac{1}{3} \int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 4}} dx$$

$$f(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)(x+2)}} dx$$

$\downarrow$ $f(x)$

$$x \rightarrow 2 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x-2} \sqrt[3]{x+2}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{4} (x-2)^{1/3}}$$

è integ. in $(2,3)$

perché $d < 1$

$\downarrow$

$d = 1/3$

$\Rightarrow f(x)$ è integ. in $(2,3)$

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^d} \quad \text{è integ. in } (a,b) \text{ se } d < 1$$

(funzioni campione centrate in a)

Oss. Se $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow 0^+$
 e $g(x)$ è integ. in $(0,1)$
 $\Rightarrow f$ è integ. in $(0,1)$



$$\text{es. } \int_0^1 \frac{1}{e^{-1/x}} dx$$

$$\frac{-1/x}{e} \rightarrow 0$$



$$x \rightarrow 0^+$$

$$\frac{1}{\frac{-1/x}{e}} \rightarrow +\infty$$

$$\frac{-1/x}{e}$$

non posso usare McLaurin

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\frac{-1/x}{e}$$

tende a zero più velocemente di qualsiasi potenza di x

$$\frac{-1/x}{e} \not\sim \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{\frac{-1/x}{e}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad x \rightarrow 0^+$$

$$\frac{1}{\frac{-1/x}{e}} \text{ tende a } +\infty \text{ più velocemente di } \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e siccome $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in $(0,1)$

anche $\frac{1}{\frac{-1/x}{e}}$ è integrabile.

oss. I criteri (confronto e confronto asintotico)

valgono per $f(x)$ sempre con lo stesso segno in (a,b) . Se $f(x)$ non è sempre dello stesso segno si guarda se converge

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

A $|f(x)|$ che è ≥ 0 si applicano i criteri

e vale:

$$\text{se } \int_a^b |f(x)| dx \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ converge}$$

Def. Se $f(x)$ è t.c. $\int_a^b |f(x)| dx$ converge
 si dice che l'integrale converge assolutamente

es. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \nexists$
 ma è una
 funzione
 illimitata

guardiamo se l'integrale
 converge
 assolutamente

$f(x)$ cambia segno
 vicino a $x=0$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

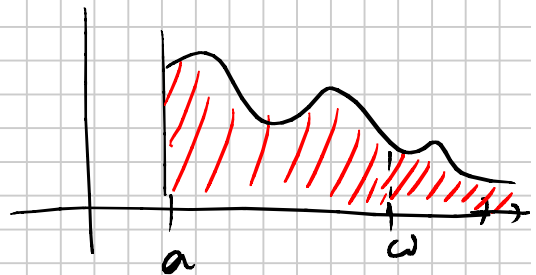
per il principio del
 confronto

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right| dx \text{ converge} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ converge.}$$

Integrazione su intervalli illimitati

$f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \doteq \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_a^{\omega} f(x) dx$$



Se $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_a^{\omega} f(x) dx \exists \text{ finito} \Rightarrow f$ è integrabile
 in $[a, +\infty)$
 oppure che l'integrale
 converge

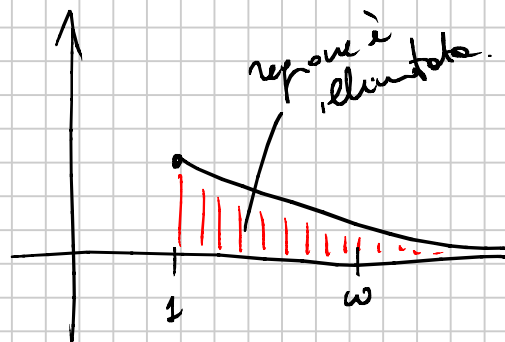
se $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_a^{\omega} f(x) dx \pm \infty \Rightarrow$ l'integrale
 diverge

se $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \parallel \nexists \Rightarrow$ l'integrale non esiste.

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{in } [1, +\infty)$$

$$x \rightarrow +\infty \quad f(x) \rightarrow 0$$

$\forall \alpha > 0$

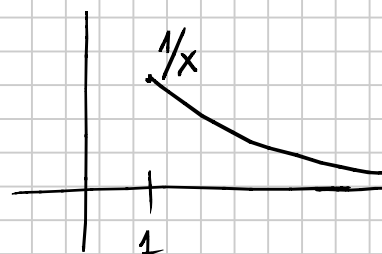


$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \log \omega = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{diverge}$$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{1} \Big|_1^{\omega} =$$

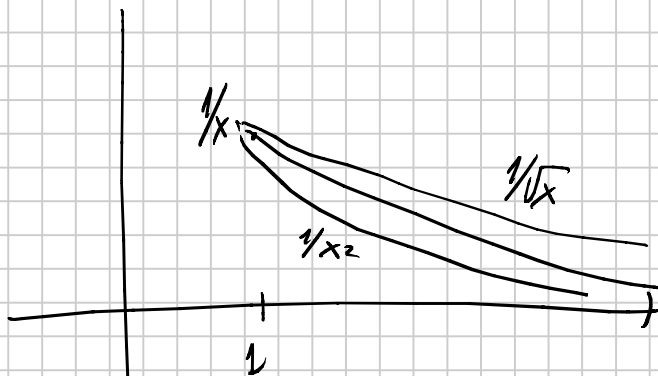
$$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\omega} - 2 = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{diverge}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\omega} + 1 \right) = 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{converge.}$$



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^d} dx = \begin{cases} \text{Converge se } d > 1 \\ \text{diverge se } d \leq 1 \end{cases}$$

Esercizi integrali

oss. f pari in $[-k, k]$

$$\int_{-k}^k f(x) dx = 2 \int_0^k f(x) dx$$



f dispari in $[-k, k]$

$$\int_{-k}^k f(x) dx = 0$$



es. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$

$\sin x$ è dispari
e l'intervallo è simmetrico

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx$$

Integrali definiti con funzioni con moduli.

$$\text{es. } \int_0^5 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^5 (x-1) dx$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 1-x & x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

$$\text{es. } \int_0^\pi x |\cos x| dx =$$



$$= \int_0^{\pi/2} x \cos x dx + \int_{\pi/2}^\pi x (-\cos x) dx$$

$$\int_{-\pi}^\pi x |\cos x| dx = 0$$

funzione $x |\cos x|$
è dispari
e l'intervallo
simmetrico rispetto
a 0.

$$\text{es. } \int_{-1}^1 \frac{|x| + \sin x}{1+x^2} dx = \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{|x|}{1+x^2} dx}_{=0} + \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx}_{=0} =$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \log(1+x^2) \Big|_0^1 = \log 2.$$

$$\text{es. } \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{1}$$

$$= -1 \pm 2 \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$x > 1 \quad \text{or} \quad x < -3$$

$$\int_0^2 1 \quad 1 = \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx$$

Integrazione di alcune funzioni irrazionali

$$\begin{aligned} \underline{\text{es.}} \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \begin{cases} x = \sin t \\ 1-x^2 = 1-\sin^2 t = \cos^2 t \\ dx = \cos t dt \end{cases} \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \cdot \cos t dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{es.}} \quad \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3 \left(1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} dx \end{aligned}$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \sin t$$

$$\boxed{\int \sqrt{1-x^2} \quad x = \sin t}$$

$$\underline{\text{es.}} \int \sqrt{1+x^2} dx$$

$$1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$$

$$x = \sinh t$$

$$dx = \cosh t dt$$

$$= \int \sqrt{\cosh^2 t} \cosh t dt =$$

$$= \int \cosh t \cdot \cosh t dt = \text{faktori (für)}.$$

$$\underline{\text{es.}} \int \sqrt{5+x^2} dx = \int \sqrt{5 \left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2\right)} dx =$$

$$= \sqrt{5} \int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} dx \quad \frac{x}{\sqrt{5}} = \sinh t$$

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2} \quad x = \sinh t}$$

$$\underline{\text{es.}} \int \sqrt{x^2 - 1} dx =$$

$$1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$$

$$\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$$

$$x = \cosh t \quad dx = \sinh t dt$$

$$= \int \sqrt{\sinh^2 t} \sinh t dt = \int |\sinh t| \sinh t dt$$

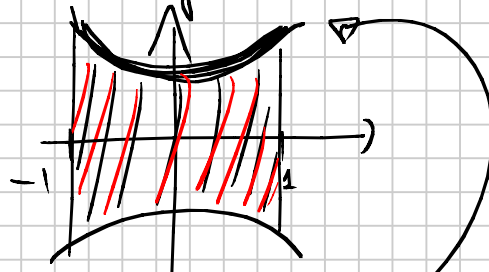
$$\underline{\text{es.}} \int \sqrt{x^2 - 8} dx = \int \sqrt{8 \left(\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2 - 1\right)} dx$$

$$\frac{x}{\sqrt{8}} = \cosh t.$$

Applicazione area sotto un'ipbole.

$$y^2 - x^2 = 1$$

$$x \in [-1, 1]$$



$$y^2 = 1 + x^2$$

$$y = \pm \sqrt{1 + x^2}$$

$$\text{Area richiesta} = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2} dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$$