

5 Dicembre 2013

Integrazione su intervalli illimitati

$f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_a^w f(x) dx$$



$\exists$ finito
integrale converge

$\pm \infty$
diverge

$\nexists$
non esiste

f è integrabile in $(a, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{w \rightarrow -\infty} \int_w^a f(x) dx$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

converge se convergono entrambi gli integrali

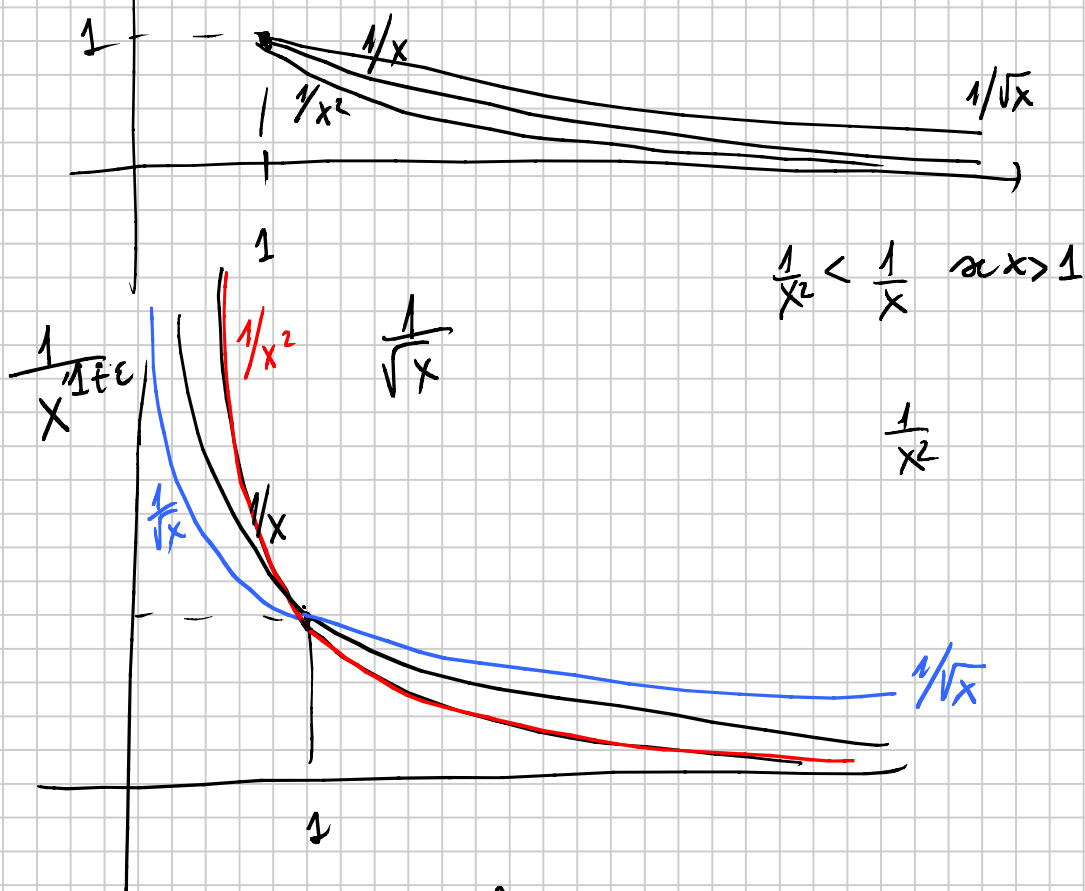
$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ in $[1, +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{w \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) \Big|_1^w = \lim_{w \rightarrow +\infty} \left(\frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right)$$

il limite è finito $\Leftrightarrow 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$

Quindi

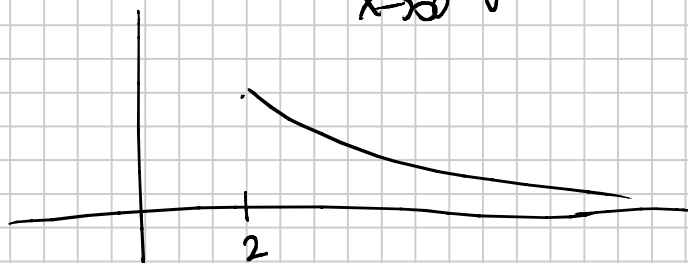
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$



Un'altra classe di funzioni da ricordare
come funzioni compare è

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \quad \text{in } [2, +\infty)$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^d (\log x)^\beta} dx \text{ converge } (\Leftrightarrow) \begin{cases} d > 1, \forall \beta \in \mathbb{R} \\ d = 1, \forall \beta > 1 \end{cases}$$

Criteri di integrabilità all'infinito $[a, +\infty)$.

Teo. 1 Condizione necessaria di integrabilità all'infinito.

$f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Si usa con: Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ non è zero
 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ NON converge

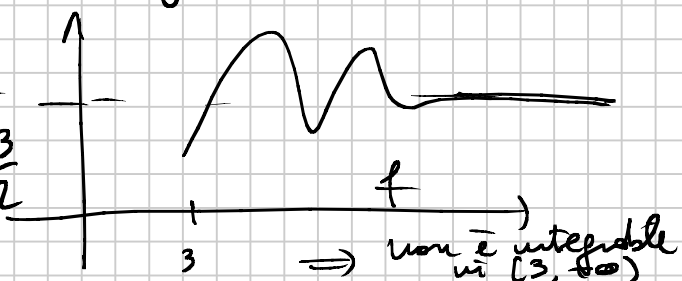
Quindi se si deve dim. che

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge, la prima cosa da controllare è che
 almeno $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

es. $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$

$\int_3^{+\infty} \frac{3x+1}{2x-5} dx$ converge?

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{2x-5} = \frac{3}{2}$



$\Rightarrow$ non è integrabile in $(3, +\infty)$

Il fatto che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ non è sufficiente ad assicurare che $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converga.



ma $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ NON converge.

es. $\int_1^{+\infty} (x^2 x) dx$

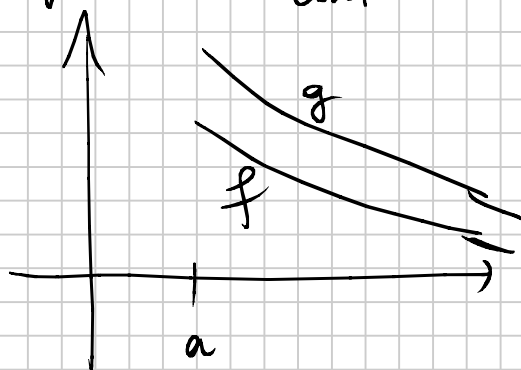
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 x \neq 0$

non è soddisfatta la condizione necessaria
l'integrale non converge.

Criterio del confronto $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
continue

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

g è integrabile in $[a, +\infty)$ $\Rightarrow f$ è integrabile in $[a, +\infty)$



f non è integrabile in $[a, +\infty)$ $\Rightarrow g$ non è integrabile in $[a, +\infty)$.

Criterio del confronto asintotico

$f > 0, g > 0$ e $f \sim g$, per $x \rightarrow +\infty$

f è integrabile $\Leftrightarrow g$ è integrabile
in $[a, +\infty)$ in $[a, +\infty)$

es. $\int_1^{+\infty} (1 - \cos \frac{1}{x}) dx$
 $f(x)$

dire se l'integrale converge.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \cos \frac{1}{x}) = 0$
è verificata la condizione necessaria

$f(x) \sim ?$ $x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

$1 - \cos(\frac{1}{x}) = 1 - (1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) =$
 $= \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$

$1 - \cos(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{2x^2}$

perché $\frac{1}{x^2}$ è integrabile in $[1, +\infty)$

$\Rightarrow 1 - \cos(\frac{1}{x})$ è integrabile
con

$\int_1^{+\infty} (1 - \cos(\frac{1}{x})) dx$ converge.

es. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

$f(x)$ è limitata in $[0, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \sim \frac{1}{x}$ $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx}_{\text{integrale definito: è un numero}} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$f(x) \sim \frac{1}{x}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad \underline{\text{non}} \quad \text{converge}$$

$$\text{es.} \quad \int_1^{+\infty} \frac{3x^2+1}{x^5 + e^{1/x} + \sin x} dx$$

$$f(x) \sim \frac{3x^2}{x^5} = \frac{3}{x^3}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^3} dx \text{ converge} \Rightarrow \text{il nostro integrale converge!}$$

$$\text{es.} \quad \int_1^{+\infty} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$f(x) = x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x} \right)$$

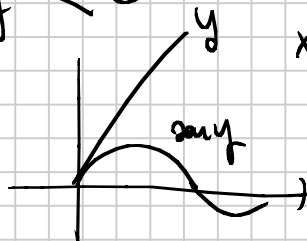
$$= x^2 \left(-\frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) =$$

$$= -\frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right) = \sin y - y < 0$$

$$\frac{1}{x} = y$$

$$x \rightarrow +\infty$$

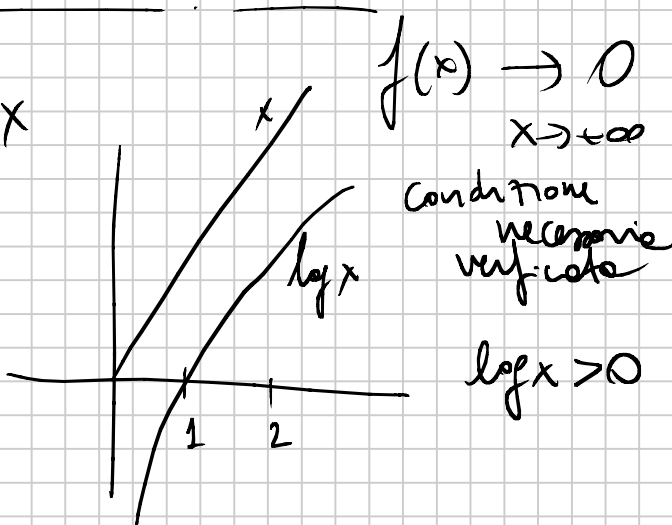


$$\int_1^{+\infty} x^2 \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) dx = - \int_1^{+\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} \right) dx$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log x} dx$$

$$\log x < x$$

$$\frac{1}{\log x} > \frac{1}{x}$$

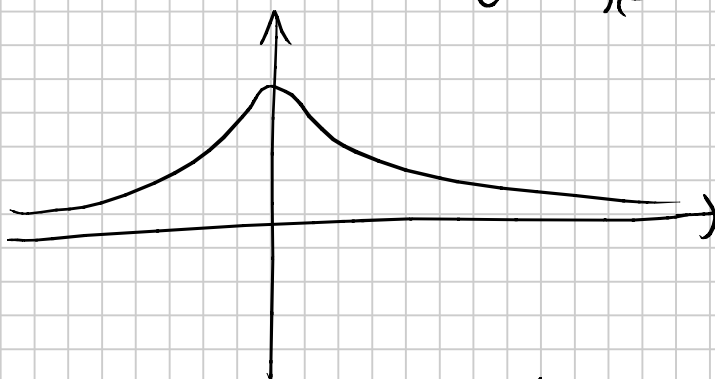


$\frac{1}{x}$ non è integrabile in $(2, +\infty)$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\log x}$ non è integrabile

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$e^{-x^2} \rightarrow 0$$



$$e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \forall x$$

e^{-x^2} va a 0 più velocemente
per $x \rightarrow +\infty$ più velocemente
di quanto
decresca di $\frac{1}{x^2}$

$$e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{e siccome } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ converge.}$$

oss. Non importa che $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow +\infty$
ma basta che $f(x)$ vada a zero più
velocemente di una $g(x)$ che è integrabile
tra $[a, +\infty)$.

oss Se f non è sempre dello stesso segno si
studia la convergenza di $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$
e se $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

es. $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^5} dx$

non si possono
applicare i criteri delle funzioni > 0 .



$$|f(x)| = \left| \frac{\sin x}{x^5} \right| \leq \frac{1}{x^5}$$

poiché $\frac{1}{x^5}$ è integrabile in $(1, +\infty) \Rightarrow$

$|f(x)|$ è integrabile in $[1, +\infty)$ e quindi anche $f(x)$.

Es. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3 \log^2 x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{x^3 \log^2 x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3 \log^2 x} \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{x^4 \log^2 x} + o(\dots)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^4 \log^2 x}$$

quale è integrabile $\left(\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 (\log x)^p} dx \right)$

Quindi $f(x)$ è integrabile in $(2, +\infty)$.

Es. $\int_2^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\log x} dx$ $x \rightarrow +\infty$

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o(x)$$

$$e^{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{x} + o(x)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{(\log x)} \frac{1}{x}$$

non è integrabile!

al variare
di α

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^3)^\alpha}{x^2 (\log^2 x + 2)} dx$$

$$f(x) \sim \frac{x^{3\alpha}}{x^2 \log^2 x} = \frac{1}{x^{2-3\alpha} \log^2 x}$$

$$2-3\alpha \geq 1$$

$$3\alpha \leq 1$$

$$\alpha \leq 1/3$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx}_{\text{diverge}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{\text{converge}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$\forall \alpha$ diverge!