# STUDI DI FUNZIONE

**Esercizio 1** (10 Dicembre 2007)

$$F(x) = \log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right) - \frac{x+5}{|x+4|}$$

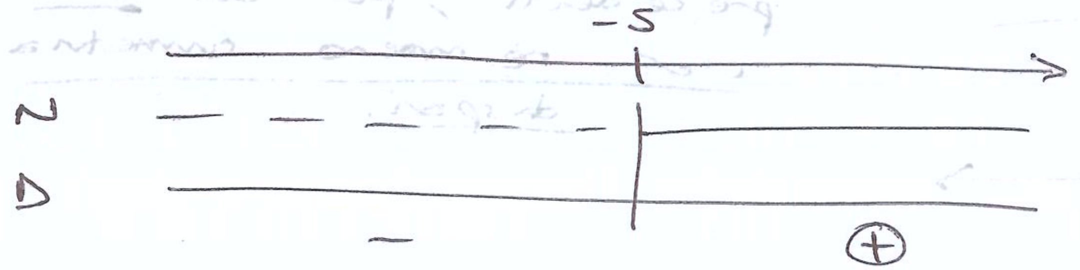
ⓐ Dominio

Devono essere verificate le condizioni:

$$\begin{cases} x+4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4 \\ \dfrac{x+5}{|x+4|} > 0 \end{cases}$$

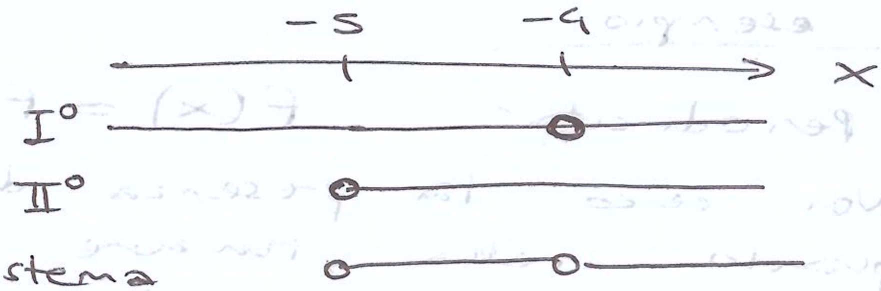
$N > 0 \qquad x+5 > 0 \qquad x > -5$

$D > 0 \qquad |x+4| > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$




$\Rightarrow \boxed{x > -5}$

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ x > -5 \end{cases}$$

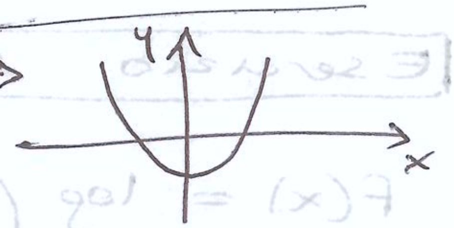



$\boxed{-5 < x < -4 \qquad x > -4}$

$$\boxed{D = (-5, -4) \cup (-4, +\infty)}$$

(b) simmetrie:

**Pari** $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D$




esempio

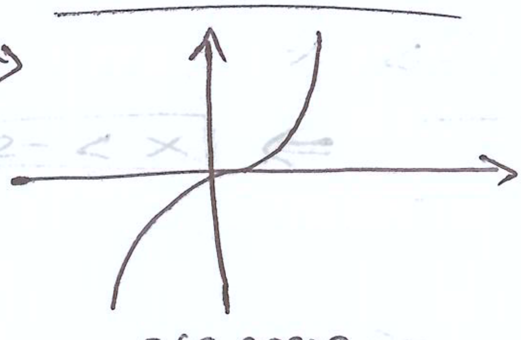
$$f(x) = \log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right) - \frac{x+5}{|x+4|}$$

$$f(-x) = \log\left(\frac{-x+5}{|-x+4|}\right) - \frac{-x+5}{|x+4|}$$

$f(x) \neq f(-x) \rightarrow$ sono chiaramente diverse, non c'è simmetria pari, lo potevo capire anche dal dominio perché non è simmetrico rispetto all'origine.

**Dispari** $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D$

$f(x) \neq -f(-x) \rightarrow$ si vede dalle espressioni precedenti, per cui non c'è nemmeno simmetria dispari.



esempio

(c) Periodicità $f(x) = f(x + \text{periodo})$

Non cerco la presenza di periodicità in quanto nella funzione non sono presenti funzioni periodiche (come sin cos tan).

NO PERIODICITÀ

ⓓ **Segno** verifico quando $f(x)$ è positiva:

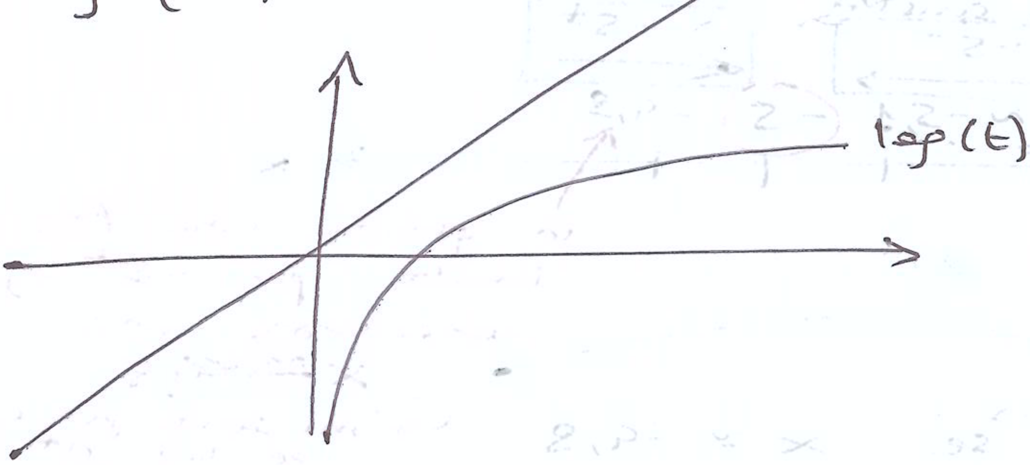
$$f(x) = \log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right) - \frac{x+5}{|x+4|} \geq 0$$

$$\log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right) \geq \frac{x+5}{|x+4|}$$

se chiamo $\frac{x+5}{|x+4|} = t$ ottengo:

$$\log(t) \geq t$$

→ non è mai verificata cioè $f(x)$ è sempre negativa




Graficamente si vede chiaramente che $t > \log(t)$ $\forall\, t$, cioè:

$$\frac{x+5}{|x+4|} > \log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right) \quad \forall\, x \in D$$

$$\Downarrow$$

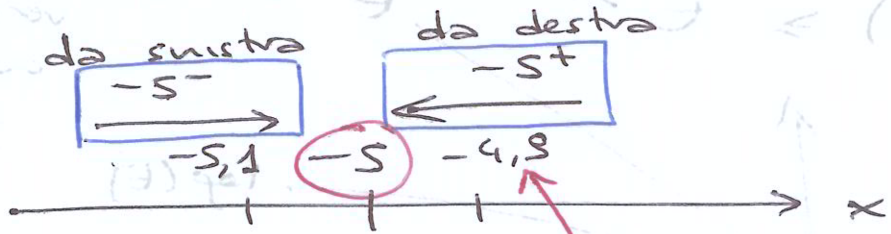
$$\boxed{f(x) < 0 \qquad \forall\, x \in D}$$

## (e) Limiti agli estremi del dominio:

$$D = (-5; -4) \cup (-4, +\infty)$$

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = \lim_{x \to -5^+} \left( \log\left( \frac{x+5}{|x+4|} \right) - \frac{x+5}{|x+4|} \right)$$

$$= \lim_{x \to -5^+} \left( \log \frac{0^+}{|-1|} - \frac{0^+}{|-1|} \right)$$

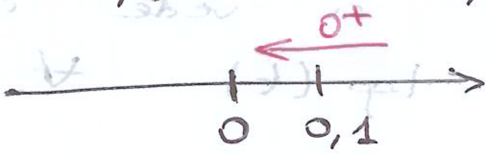



in questo caso fare il limite per $-5^+$ significa considerare una $x \simeq -4{,}9$

↳ mi serve per capire se ho $0^+$ o $0^-$

$(x+5)$ se $x \simeq -4{,}9$

$= -4{,}9 + 5 = 0{,}1 \longrightarrow \boxed{0^+}$



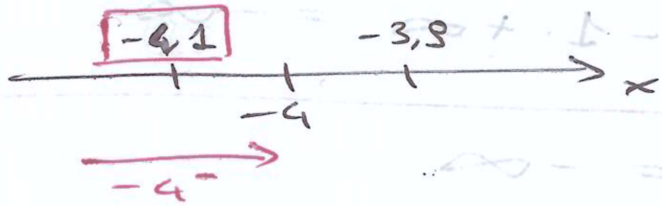

$$= \lim_{x \to -5^+} \log 0^+ - 0 = -\infty - 0 = -\infty$$

cioè $\lim_{x \to -5^+} f(x) = -\infty$

$x = -5$ è asintoto verticale destro (+)

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-} \left( \log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right) - \frac{x+5}{|x+4|} \right)$$

$x \to -4^-$ significa $x \simeq -4,1$




cioe' $|x+4|$ se $x \simeq -4,1$ — per capire se ottengo $0^+$ o $0^-$

$\hookrightarrow = |-4,1+4| = |-0,1| = |0^-| = 0^+$

$(x+5)$ se $x \simeq -4$

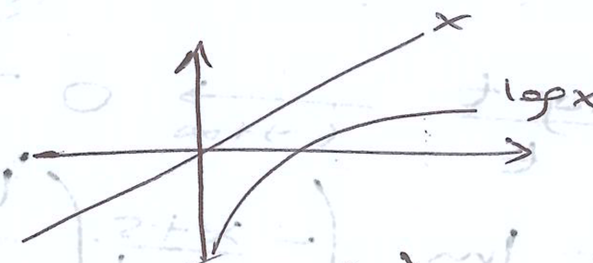
$\hookrightarrow = -4+5 = 1$

$$= \lim_{x\to -4^-} \log\left(\frac{1}{0^+}\right) - \frac{1}{0^+}$$

forma indeterminata

$$= \lim_{x\to -4^-} \log(+\infty) - \infty = [+\infty - \infty]$$

Sapendo che $\boxed{x > \log x}$ $\forall x$, posso raccogliere il termine che va ad $\infty$ più velocemente, cioe' il termine lineare in questo caso:




$$= \lim_{x\to -4^-} \left( -\frac{x+5}{|x+4|} \left( \cancel{\frac{\log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right)}{-\frac{x+5}{|x+4|}}} + 1 \right) \right)$$

→ e' trascurabile

$$\boxed{\frac{\log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right)}{\frac{x+5}{|x+4|}} \xrightarrow[x\to -4^-]{} \frac{\log t}{t} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0}$$

Cioe' il termine $t$ e' un ordine di infinito superiore rispetto al termine

$\log(t)$, quindi ottengo:

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) \cong \log \left. -\frac{x+5}{|x+4|} \right|_{x\to -4^-} = -\frac{1}{0^+}$$

$$= -1 \cdot +\infty = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to -4^-} f(x) = -\infty}$$

$\boxed{x = -4 \text{ è un asintoto verticale sinistro}^{(*)}}$

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} \left(\log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right) - \frac{x+5}{|x+4|}\right)$$

$x \to -4^+$ $\qquad x \simeq -3,9$

$|x+4| = |-3,9+4| = |0,1| = 0^+$

$x+5 = -4+5 = 1$

$$= \lim_{x\to -4^+} \log\frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+} = [+\infty - \infty]$$

Opero come nel caso precedente:

se $x \to -4^+$ $\quad \frac{x+5}{|x+4|} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow t \to +\infty$

$\frac{\log t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ è trascurabile

$$= \lim_{x\to -4^+}\left(-\frac{x+5}{|x+4|}\cdot\left(\cancel{\frac{\log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right)}{-\frac{x+5}{|x+4|}}} + 1\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to -4^+}\left(-\frac{x+5}{|x+4|}\cdot(0+1)\right) = \lim_{x\to -4^+} -\frac{x+5}{|x+4|}$$

$$= -\frac{1}{0^+} = -1 \cdot +\infty = -\infty$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to -4^+} f(x) = -\infty \\ x=-4 \text{ è anche asintoto verticale destro}\end{array}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right) - \frac{x+5}{|x+4|}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x+5}{|x+4|}}_{\geq 0} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\cancel{\frac{5}{x}}^{\,0}\right)}{x\left(1+\underbrace{\cancel{\frac{4}{x}}}_{0}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\cancel{\log(1)}}_{0} - 1 = -1$$

cioè:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1 \\ y=-1 \text{ è asintoto orizzontale destro}\end{array}}$$

## (F) Continuità

La funzione $f(x)$ è continua nel suo dominio $\mathbb{D}$ in quanto è data dalla composizione di funzioni continue.

9 Derivata

$$F'(x) = \frac{1}{\frac{x+5}{|x+4|}} \cdot \frac{1\cdot|x+4| - (x+5)\frac{|x+4|}{x+4}}{(|x+4|)^2} - \left( \frac{1\cdot|x+4| - (x+5)\frac{|x+4|}{x+4}}{(|x+4|)^2} \right)$$

$$= \frac{|x+4| - (x+5)\frac{|x+4|}{x+4}}{(x+4)^2} \left( \frac{1}{\frac{x+5}{|x+4|}} - 1 \right)$$

$$= \frac{|x+4|\left(1 - \frac{x+5}{x+4}\right)}{(x+4)^2} \left( \frac{|x+4|}{x+5} - 1 \right)$$

$$= \frac{|x+4|\,(\cancel{x}+4-\cancel{x}-5)}{(x+4)^3} \left( \frac{|x+4| - (x+5)}{x+5} \right)$$

$$= \frac{-1\,|x+4|\,\big(|x+4| - (x+5)\big)}{(x+4)^3\,(x+5)}$$

Se $x+4>0$ $\qquad |x+4| = x+4$

$$F'(x) = \frac{-1\,\cancel{(x+4)}\,(\cancel{x}+4-\cancel{x}-5)}{(x+4)^{\cancel{3}}\,(x+5)} = \frac{1}{(x+4)^2(x+5)}$$

Se $x+4<0$ $\qquad |x+4| = -x-4$

$$F'(x) = \frac{+1\,\cancel{(x+4)}\,(-x-4-x-5)}{(x+4)^{\cancel{3}}\,(x+5)} = \frac{-1\,(2x+9)}{(x+4)^2(x+5)}$$

La derivata è continua nel suo dominio quindi $f(x)$ è continua e derivabile in $D$. Un punto di discontinuità della derivata potrebbe essere $x=-4$ ma è un punto che non appartiene al dominio $D$ quindi non è necessario approfondire questo aspetto.

## Punti stazionari e monotonia

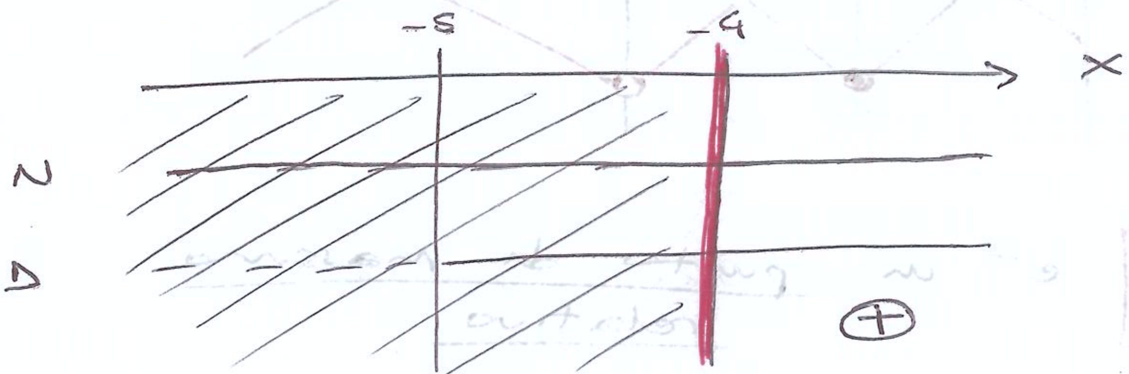
- se $x+4>0$ $\quad \boxed{x>-4}$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+4)^2(x+5)} \geq 0$$

$N \geq 0 \qquad 1 \geq 0 \quad \forall x \in D$

$D > 0 \qquad (x+4)^2(x+5) > 0 \Rightarrow x+5>0$, $x>-5$

$\hookrightarrow \geq 0 \ \forall x$




$\boxed{f'(x) > 0 \qquad x > -4}$ (f crescente)

- se $x+4<0$ $\quad \boxed{x<-4}$

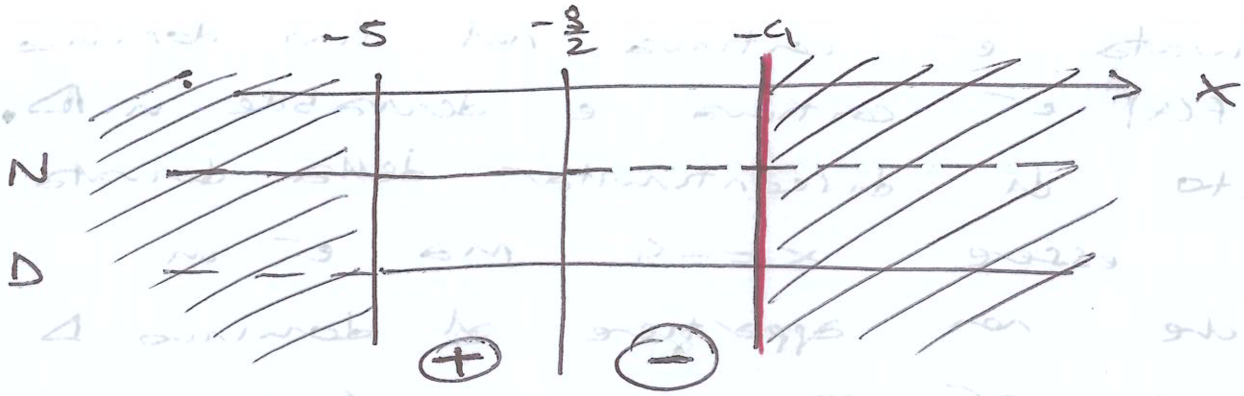
$$f'(x) = \frac{-1(2x+9)}{(x+4)^2(x+5)} \geq 0$$

$N \geq 0 \qquad -(2x+9) \geq 0 \qquad -2x-9 \geq 0$

$x \leq -\frac{9}{2}$

$D > 0 \qquad (x+4)^2(x+5) > 0 \qquad x+5>0$

$\hookrightarrow \geq 0 \qquad x>-5$

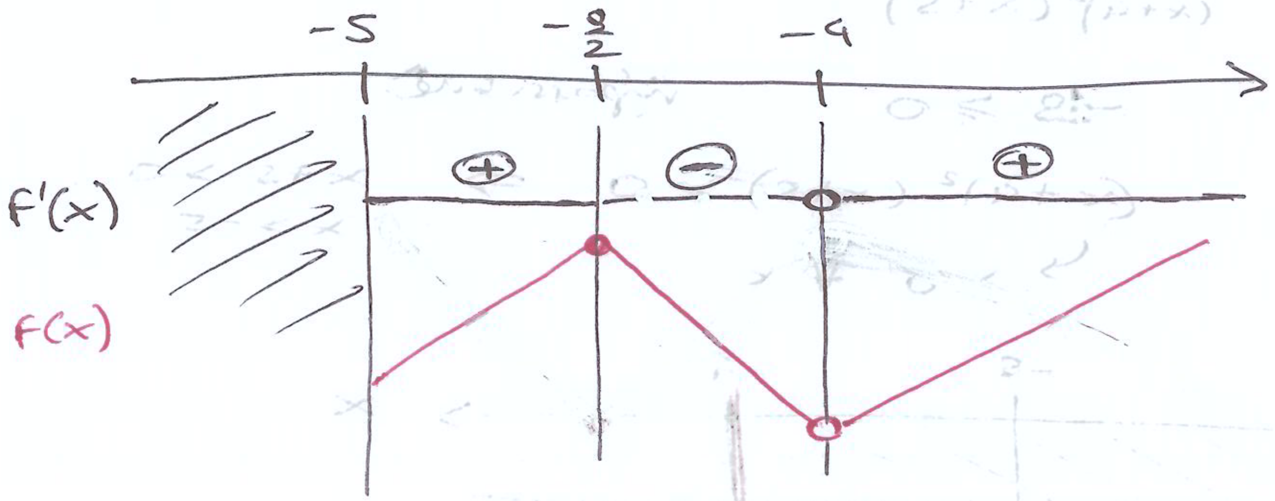



$$\boxed{\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & -\frac{9}{2} < x < -4 \\ f'(x) > 0 & -5 < x < -\frac{9}{2} \end{array}}$$

(f decrescente)

(f crescente)

In conclusione si ottiene:




$\boxed{x = -\frac{9}{2}}$ è un punto di massimo relativo

$$f\left(-\frac{9}{2}\right) = \log\left(\frac{-\frac{9}{2}+5}{\left|-\frac{9}{2}+4\right|}\right) - \left(\frac{-\frac{9}{2}+5}{\left|-\frac{9}{2}+4\right|}\right)$$

$$= \log\left(\frac{-9+10}{|-9+8|}\right) - \left(\frac{-9+10}{|-9+8|}\right)$$

$$= \log\frac{1}{|-1|} - \frac{1}{|-1|} = \cancel{\log 1} - 1 = -1$$

## (h) Derivata seconda

**Se $x > -4$** $\quad (x+4>0)$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+4)^2\,(x+5)}$$

$$f''(x) = \frac{-\left[2(x+4)(x+5)+(x+4)^2\right]}{\left((x+4)^2\,(x+5)\right)^2}$$

$$= \frac{-\cancel{(x+4)}\left[2x+10+x+4\right]}{(x+4)^{\cancel{4}}\,(x+5)^2}$$

$$= \frac{-(3x+14)}{(x+4)^3\,(x+5)^2}$$

**Se $x < -4$** $\quad (x+4<0)$

$$f'(x) = \frac{-1(2x+9)}{(x+4)^2\,(x+5)}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x+4)^2(x+5)+(2x+9)\left[2(x+4)(x+5)+(x+4\right.}{(x+4)^4\,(x+5)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(x+4)}\left[-2(x+4)(x+5)+(2x+9)\left[2x+10+x+4\right]\right.}{(x+4)^{\cancel{4}}\,(x+5)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2+5x+4x+20)+(2x+9)(3x+14)}{(x+4)^3\,(x+5)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-10x-8x-40+6x^2+28x+27x+12}{(x+4)^3\,(x+5)^2}$$

$$= \frac{4x^2+37x+86}{(x+4)^3\,(x+5)^2}$$

## Studio derivata seconda – concavità e flessi

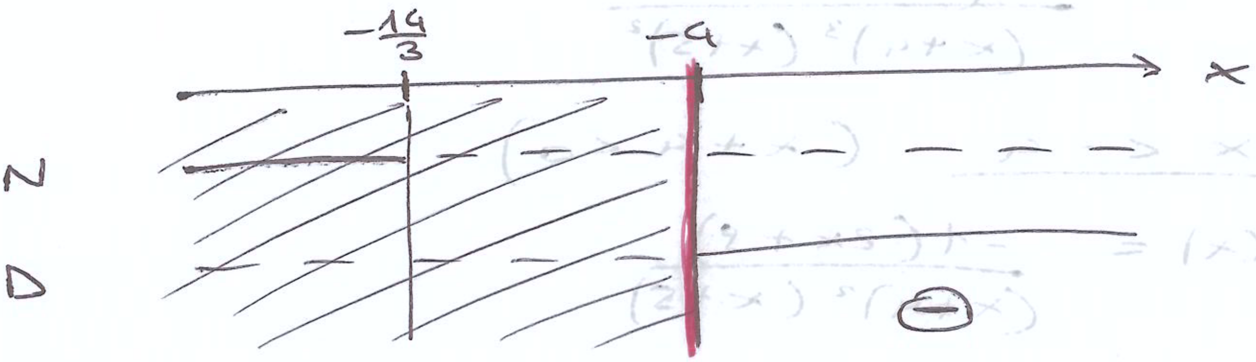
**Se** $\boxed{x > -4}$

$$f''(x) = \frac{-(3x+14)}{(x+4)^3 (x+5)^2} \geq 0$$

$N \geq 0$ $\quad -3x - 14 \geq 0$

$$x \leq -\frac{14}{3}$$

$D > 0$ $\quad (x+4)^3 \underbrace{(x+5)^2}_{\geq 0 \ \forall x} > 0$ $\qquad x+4 > 0$, $\quad x > -4$



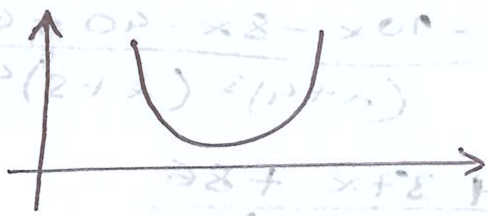

$$\boxed{f''(x) < 0 \qquad x > -4}$$

**Se** $\boxed{x < -4}$

$$f''(x) = \frac{4x^2 + 37x + 86}{(x+4)^3 (x+5)^2} \geq 0$$

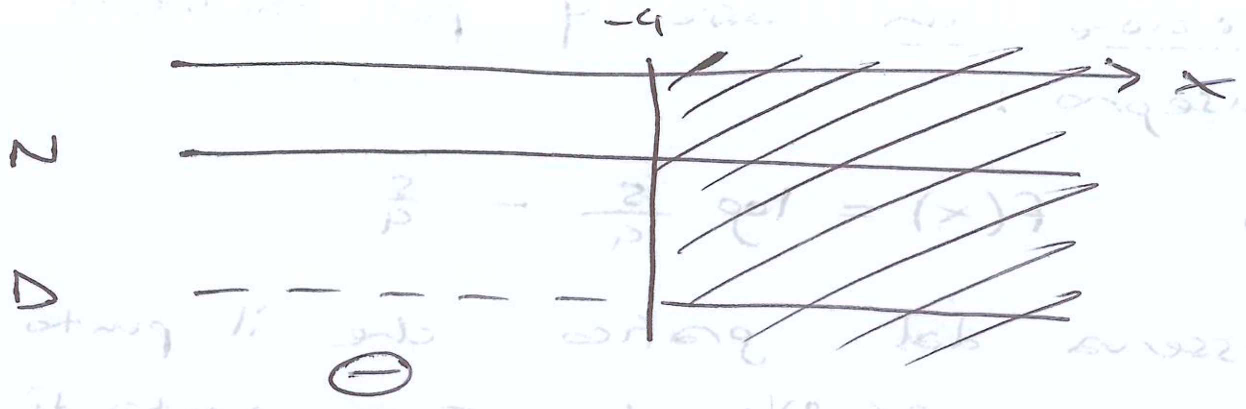
$N \geq 0$ $\quad 4x^2 + 37x + 86 \geq 0$

$$\Delta = 1369 - 4 \cdot 86 \cdot 4 = -7$$



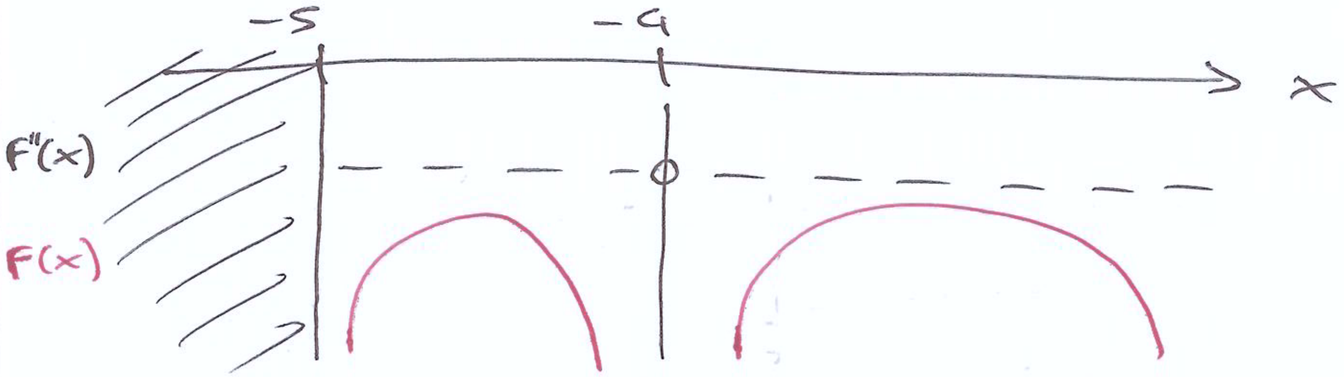
positiva $\forall x$

$D > 0$ $\quad (x+4)^3 \underbrace{(x+5)^2}_{\geq 0 \ \forall x} > 0$ $\qquad x+4 > 0$, $\quad x > -4$

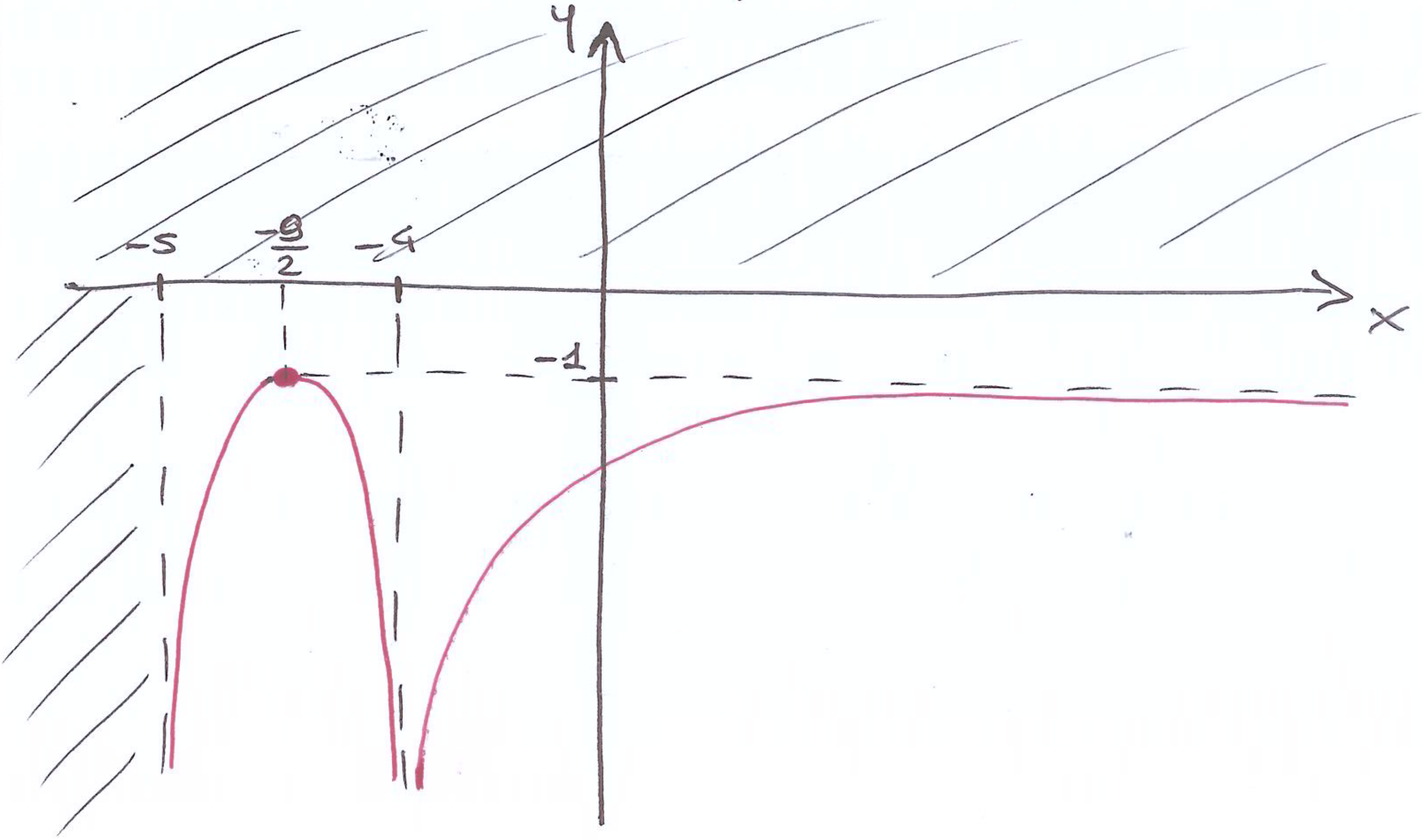



$\boxed{F''(x) < 0 \qquad x < -4}$

In conclusione si ha:



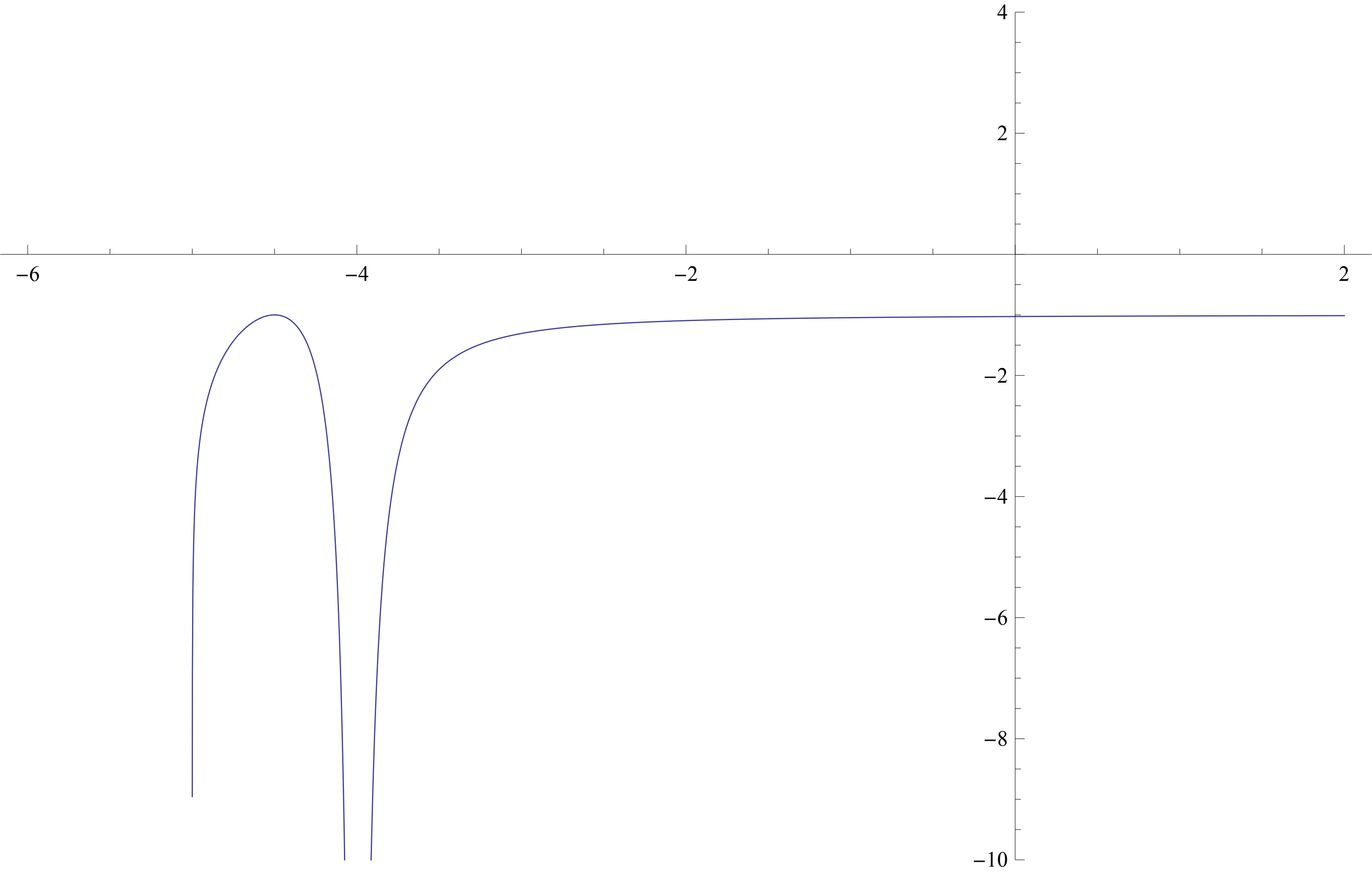

Non ci sono flessi per cui $F''(x) = 0$



Intersezione con asse y per facilitare il disegno:

$x = 0 \qquad f(x) = \log \frac{5}{4} - \frac{5}{4}$

Si osserva dal grafico che il punto $x = -\frac{9}{2}$ $\quad y = f(-\frac{9}{2}) = -1$ e' un punto di massimo assoluto



4
2
−6
−4
−2
2
−2
−4
−6
−8
−10

$\boxed{\text{Esercizio } 2}$ (9 settembre 2008)

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) - \frac{x}{4}$$

ⓐ Dominio

Devono essere verificate le condizioni:

$$e^{2x} - 1 \neq 0 \Rightarrow e^{2x} \neq 1$$

$$\log e^{2x} \neq \log 1 \Rightarrow 2x \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 0}$$

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

ⓑ Simmetrie

Pari $\quad f(x) = f(-x)$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) - \frac{x}{4}$$

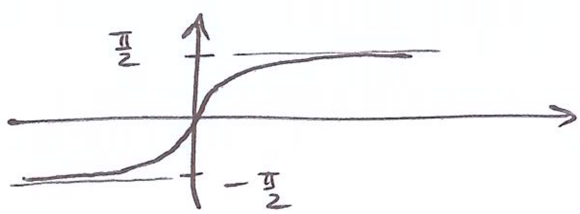
$$f(-x) = \arctan\left(\frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}\right) + \frac{x}{4}$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{1}{e^{2x}}+1}{\frac{1}{e^{2x}}-1}\right) + \frac{x}{4}$$

$$= \arctan\left(\frac{1+e^{2x}}{\cancel{e^{2x}}} \cdot \frac{1}{\frac{1-e^{2x}}{\cancel{e^{2x}}}}\right) + \frac{x}{4}$$

$$= \arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{-(e^{2x}-1)}\right) + \frac{x}{4}$$

$\arctan(-x) = -\arctan(x)$ perché l'arcotangente è una funzione dispari



Quindi posso scrivere:

$$\arctan\left(-\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) = -\arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)$$

cioè:

$$\boxed{\begin{aligned} f(-x) &= -\arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) + \frac{x}{4} \\ &= -\left(\arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) - \frac{x}{4}\right) = -f(x) \end{aligned}}$$

$f(-x) \neq f(x) \longrightarrow$ <u>NO SIMMETRIA PARI</u>

Però si ha: <u>DISPARI</u> $f(x) = -f(-x)$

$$\boxed{f(-x) = -f(x) \longrightarrow \text{SIMMETRIA DISPARI}}$$

Quindi posso studiare la funzione solo per $x > 0$ e poi sfruttare la simmetria per tracciare il diagramma.

$D' =$ dominio ristretto $= (0, +\infty)$

ⓒ <u>Periodicità</u> $f(x) = f(x + \text{periodo})$

Non sono presenti periodicità perché la funzione non contiene funzioni periodiche (come sin cos tan)

ⓓ <u>Segno</u>

Non è richiesto perché molto complicato.

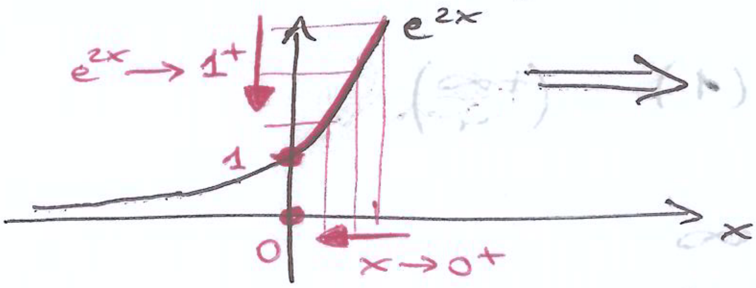
## (e) Limiti agli estremi del dominio

$D' = (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) - \frac{x}{4}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1+1}{1^+-1}\right) - \cancel{\frac{0}{4}}$$

Analizzo $e^{2x}$ quando $x \to 0^+$




$\Longrightarrow$ quando $x \to 0^+$ $\boxed{e^{2x} \to 1^+}$

$(e^0 = 1)$

$$= \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{2}{0^+}\right) = \lim_{x\to 0^+} \arctan(+\infty)$$

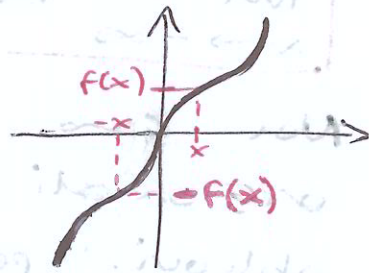
($\frac{2}{0^+} \to +\infty$)

$$= +\frac{\pi}{2}$$

Cioè $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\frac{\pi}{2}}$

Per simmetria dispari

$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}}$




(esempio)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) - \frac{x}{4}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{e^{2x}\left(1+\cancel{\frac{1}{e^{2x}}}\right)}{e^{2x}\left(1-\cancel{\frac{1}{e^{2x}}}\right)}\right) - \frac{x}{4}$$

$\to \frac{1}{\infty} = 0$

$\to \frac{1}{\infty} = 0$

$$\cong \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}}\right) - \frac{x}{4}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \arctan(1) - \left(\frac{+\infty}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \infty = -\infty$$

cioe' si ottiene

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

per simmetria dispari

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

Non sono presenti asintoti verticali o orizzontali. cerco eventuali <u>asintoti obliqui</u> per $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) - \frac{x}{4}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\arctan\left(\frac{\cancel{e^{2x}}\left(1+\cancel{\frac{1}{e^{2x}}}\right)}{\cancel{e^{2x}}\left(1-\cancel{\frac{1}{e^{2x}}}\right)}\right) - \frac{x}{4}}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(1) - \frac{x}{4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}}{x}$$

$$\simeq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\,\frac{x\left(-1+\cancel{\frac{\pi}{x}}\right)}{x} \simeq -\frac{1}{4}\,\cancel{\frac{x}{x}} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

$\to \frac{1}{\infty} = 0$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) - \frac{x}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) - \cancel{\frac{x}{4}} + \cancel{\frac{x}{4}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{\cancel{e^{2x}}\left(1+\cancel{\frac{1}{e^{2x}}}\right)}{\cancel{e^{2x}}\left(1-\cancel{\frac{1}{e^{2x}}}\right)}\right)$$

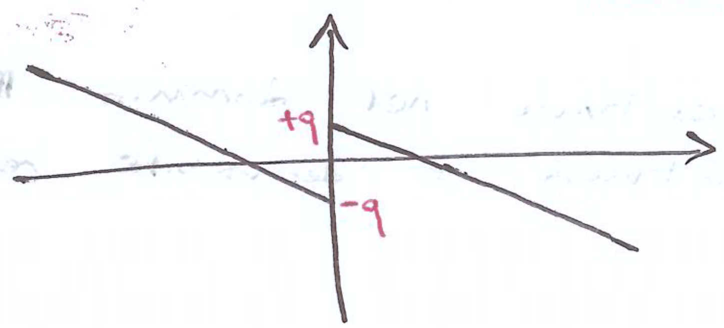
$$= \arctan(1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Esiste un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ di equazione:

$$y = mx + q \implies \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{4}} \quad x \to +\infty$$

Per simmetria dispari c'è un asintoto obliquo anche per $x \to -\infty$:

$$y = mx - q \implies \boxed{y = -\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4}} \quad x \to -\infty$$




$\implies$ m rimane lo stesso mentre q cambia di segno

## (f) Continuità

La funzione $f(x)$ è continua nel suo dominio $\mathbb{D}$ perché data dalla combinazione di funzioni continue ($\arctan$ $e^x$ $x$).

## (g) Derivata

$$f'(x) = \left( \frac{1}{1+\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^2} \cdot \frac{e^{2x}\cdot 2\cdot(e^{2x}-1)-(e^{2x}+1)e^{2x}\cdot 2}{(e^{2x}-1)^2} \right) - \frac{1}{4}$$

$$= \left( \frac{1}{\frac{(e^{2x}-1)^2+(e^{2x}+1)^2}{\cancel{(e^{2x}-1)^2}}} \cdot \frac{2e^{2x}(\cancel{e^{2x}}-1-\cancel{e^{2x}}-1)}{\cancel{(e^{2x}-1)^2}} \right) - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2e^{2x}(-2)}{e^{4x}+1-\cancel{2e^{2x}}+e^{4x}+1+\cancel{2e^{2x}}} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{-4e^{2x}}{2e^{4x}+2} - \frac{1}{4} = \frac{-8e^{2x}-(e^{4x}+1)}{4(e^{4x}+1)}$$

$$= -\frac{e^{4x}+8e^{2x}+1}{4(e^{4x}+1)}$$

## (h) Derivabilità

La derivata è continua nel dominio $\mathbb{D}'$ quindi $f(x)$ è continua e derivabile nel suo dominio.

## ① Monotonia e punti di estremo

$$F'(x) = -\frac{e^{4x} + 8e^{2x} + 1}{4(e^{4x}+1)} \geq 0$$

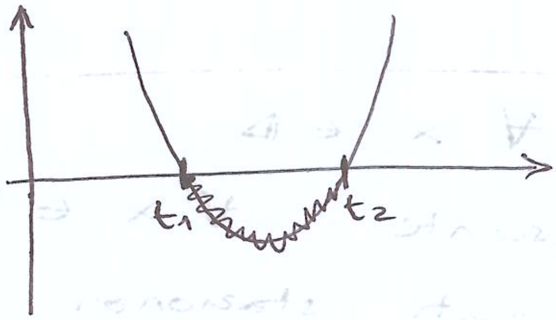
$N \geq 0 \qquad -(e^{4x} + 8e^{2x} + 1) \geq 0$

$$e^{4x} + 8e^{2x} + 1 \leq 0$$

$t = e^{2x}$ (sostituisco)

$$t^2 + 8t + 1 \leq 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-4}}{2} = \begin{cases} \frac{-8-\sqrt{60}}{2} \\ \frac{-8+\sqrt{60}}{2} \end{cases}$$



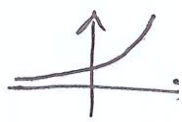

$$\frac{-8-\sqrt{60}}{2} \leq t \leq \frac{-8+\sqrt{60}}{2}$$

$$\boxed{\frac{-8-\sqrt{60}}{2} \leq e^{2x} \leq \frac{-8+\sqrt{60}}{2}}$$

Si osserva:

- $\frac{-8-\sqrt{60}}{2} < 0$
- $\frac{-8+\sqrt{60}}{2} < 0 \longrightarrow$ perché $\sqrt{60} < \sqrt{64}$, $\sqrt{60} < 8$

Mentre invece $e^{2x} > 0 \quad \forall x$



Quindi la disequazione:

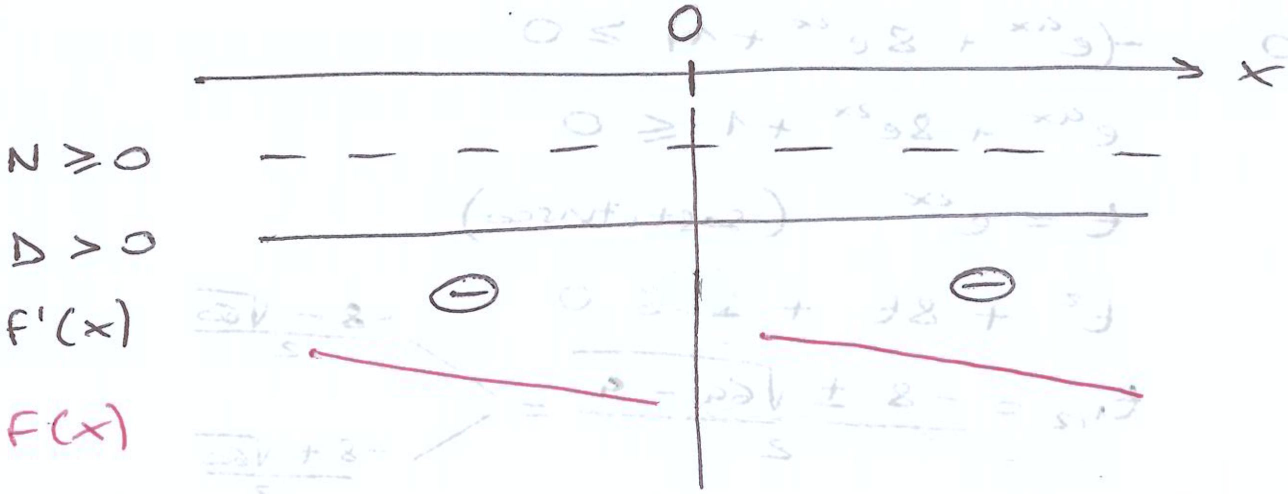
$$\frac{-8-\sqrt{60}}{2} \leq e^{2x} \leq \frac{-8+\sqrt{60}}{2}$$

è <u>impossibile</u>, $N \geq 0$ per nessun valore di $x \in D$

$D > 0 \qquad 4(e^{4x}+1) > 0$

$e^{4x}+1 > 0 \quad \forall x \in D$

$\hookrightarrow > 0$




$F'(x) < 0 \quad \forall x \in D$

$F(x)$ e' decrescente $\forall x \in D$

Non ci sono punti stazionari in cui $F'(x) = 0$

② Derivata seconda e convessità

$$F''(x) = -\left(\frac{(e^{4x}\cdot 4 + 8e^{2x}\cdot 2)\,4(e^{4x}+1) - (e^{4x}+8e^{2x}+1)\,4e^{4x}\cdot 4}{(4(e^{4x}+1))^2}\right)$$

$$= -\frac{\cancel{4}\left[(4e^{4x}+16e^{2x})(e^{4x}+1) - 4e^{4x}(e^{4x}+8e^{2x}+1)\right]}{4\,\cancel{16}\,(e^{4x}+1)^2}$$

$$= -\frac{(\cancel{4e^{8x}}+16e^{6x}+\cancel{4e^{4x}}+16e^{2x}-\cancel{4e^{8x}}-32e^{6x}-\cancel{4e^{4x}})}{4(e^{4x}+1)^2}$$

$$= \frac{-(-16e^{6x}+16e^{2x})}{4(e^{4x}+1)^2} = \frac{\overset{4}{\cancel{16}}(e^{6x}-e^{2x})}{\cancel{4}(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{4e^{2x}(e^{4x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}(e^{2x}-1)\cancel{(e^{2x}+1)}}{(e^{2x}+1)^{\cancel{2}}}$$

differenza di due quadrati

$$F''(x) = \frac{4e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)}$$

Studio ora il segno della derivata:

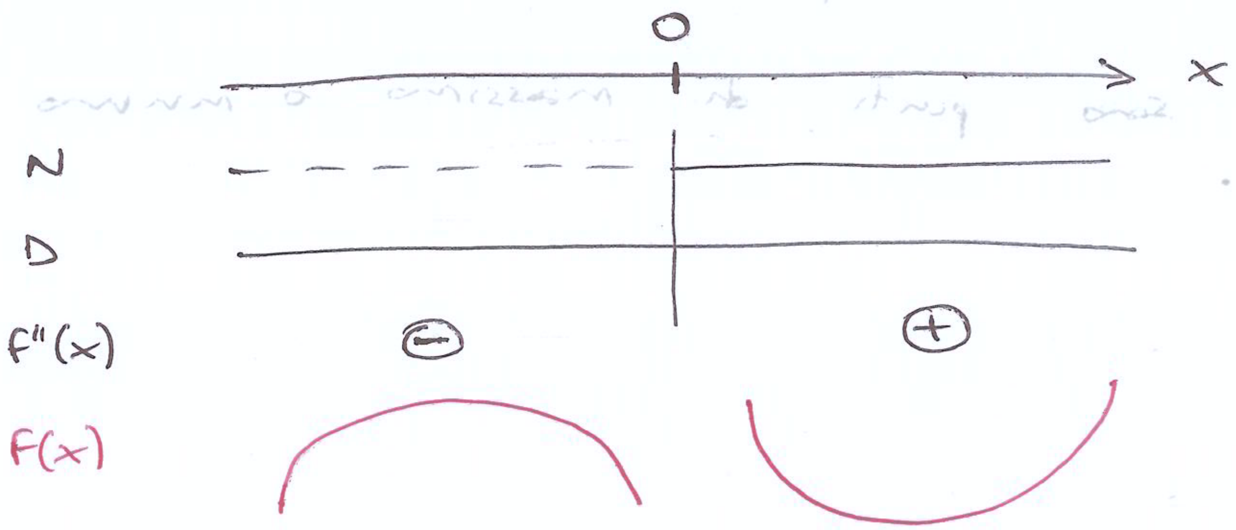
$$F''(x) = \frac{4e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)} \geq 0$$

$N \geq 0$ $\quad \underbrace{4e^{2x}}_{\geq 0 \ \forall x} (e^{2x}-1) \geq 0$

$e^{2x} - 1 \geq 0 \longrightarrow e^{2x} \geq 1$

$\lg e^{2x} \geq \lg 1 \longrightarrow 2x \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \geq 0}$

$D > 0$ $\quad e^{2x} + 1 > 0 \longrightarrow e^{2x} > -1 \quad \boxed{\forall x \in D}$



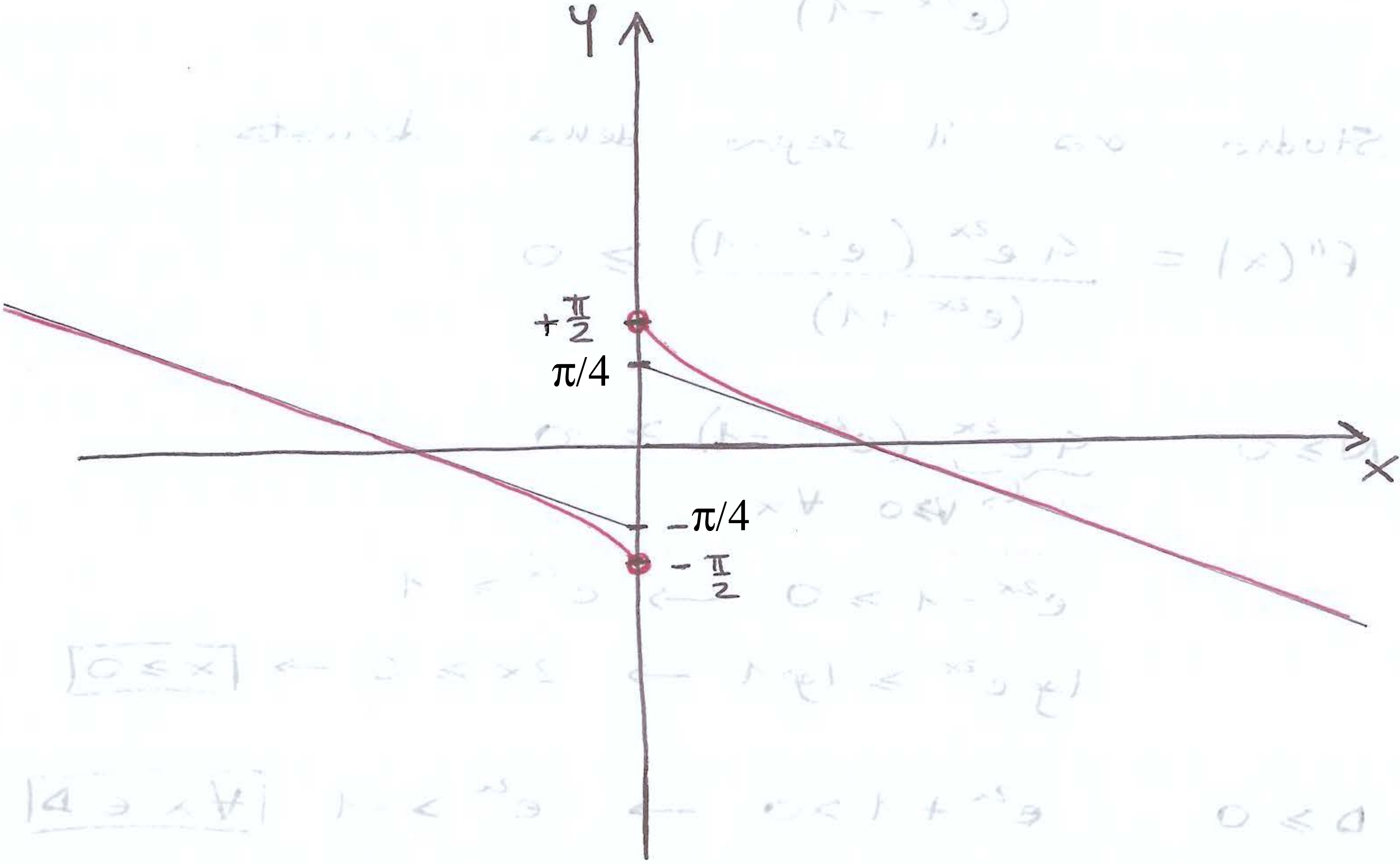

Si ottiene:

$F''(x) < 0 \qquad x < 0$

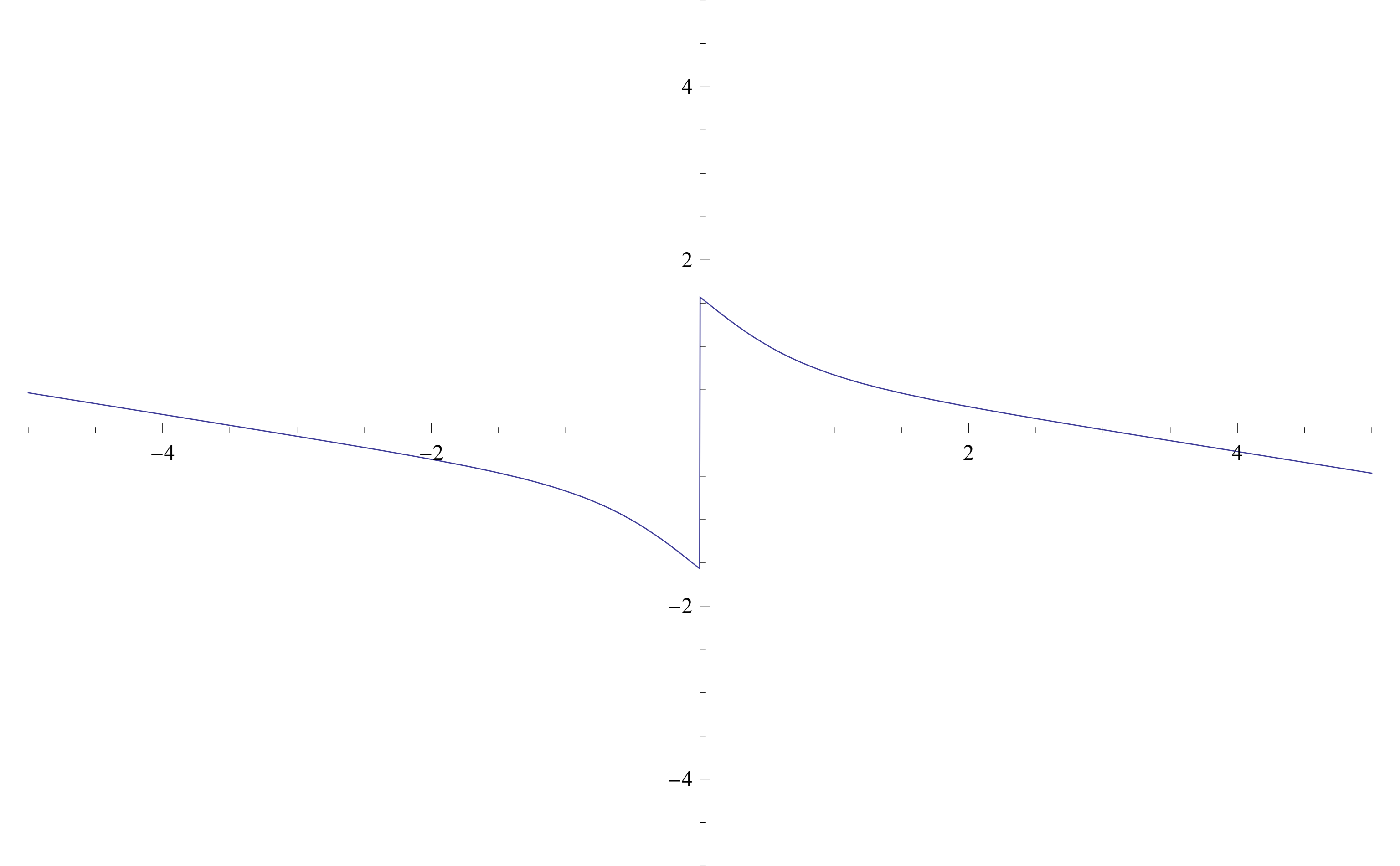
$F''(x) > 0 \qquad x > 0$

Non ci sono punti di flesso perché $x = 0$ non appartiene al dominio.

## (M) Grafico della funzione




Non ci sono punti di massimo o minimo assoluti.


4
2
−2
−4
−4
−2
2
4

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ (23 settembre 2008)

$$f(x) = \sqrt{4\cos^2 x - 1} + |\sin x|$$

② Dominio

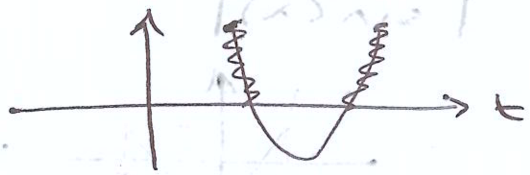
Deve essere verificata la seguente condizione:

$$4\cos^2 x - 1 \geq 0$$

$$4\cos^2 x \geq 1 \longrightarrow \cos^2 x \geq \frac{1}{4}$$

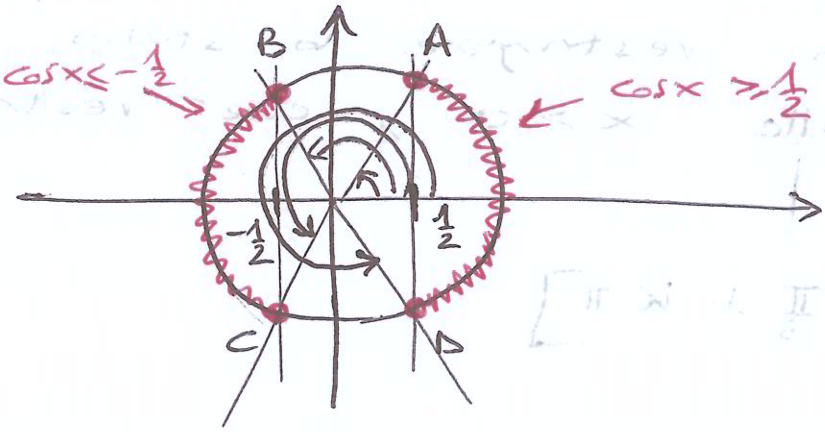
$$\cos x = t \longrightarrow t^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$t^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \qquad t_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = \frac{\pm 1}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$t \leq -\frac{1}{2} \;\cup\; t \geq \frac{1}{2}$$

$$\cos x \leq -\frac{1}{2} \quad \cup \quad \cos x \geq \frac{1}{2}$$




$$\alpha_A = \frac{\pi}{3} \qquad \alpha_B = \frac{2}{3}\pi \qquad \alpha_C = \frac{4}{3}\pi \qquad \alpha_D = -\frac{\pi}{3}$$

$$\alpha_D + k\pi \leq x \leq \alpha_A + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\hookrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_B = \alpha_D + \pi \\ \alpha_C = \alpha_A + \pi \end{array}\right\}$ Il tratto BC è già incluso mettendo un periodo $\pi$ invece di $2\pi$

$$\boxed{-\frac{\pi}{3}+k\pi \le x \le +\frac{\pi}{3}+k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}}$$

$$\boxed{D = \left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ +\frac{\pi}{3}+k\pi\right] \qquad k\in\mathbb{Z}}$$

(b) Simmetrie

$$f(x) = \sqrt{4\cos^2 x - 1} + |\sin x|$$

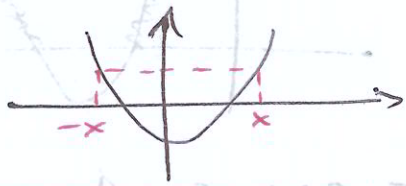
$$f(-x) = \sqrt{4(\cos(-x))^2 - 1} + |\sin(-x)|$$

Noto che:

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$= \sqrt{4(\cos x)^2 - 1} + |-\sin(x)|$$
$$= \sqrt{4\cos^2 x - 1} + |\sin(x)|$$

Si osserva che:




$$f(-x) = f(x)$$

cioe' e' presente una $\boxed{\text{simmetria pari}}$ e quindi posso restringere lo studio della funzione alle $x \ge 0$, cioe' restringo il dominio:

$$D' = \left[0, \frac{\pi}{3}+k\pi\right]$$

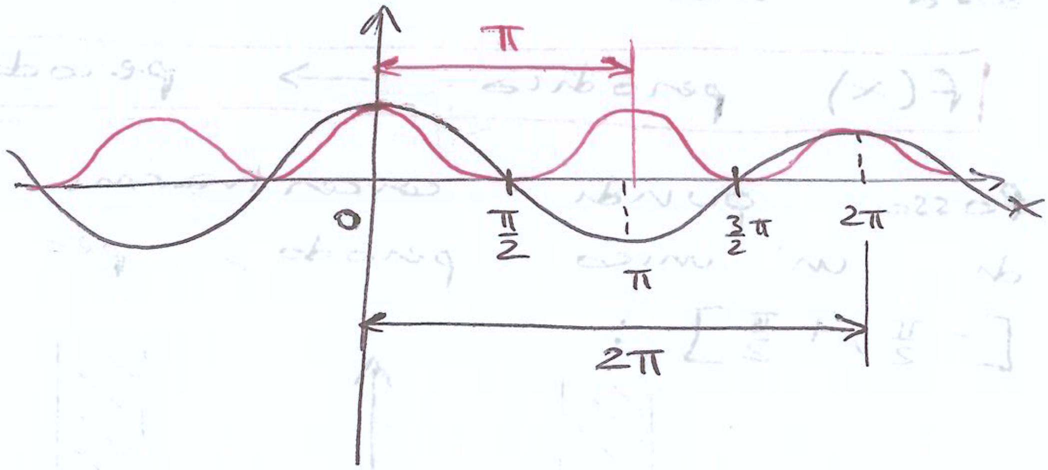
Ⓒ Periodicità

$f(x + \text{periodo}) = f(x)$

Analizzo le funzioni interne una ad una

$\cos x$

$\boxed{\cos^2 x}$

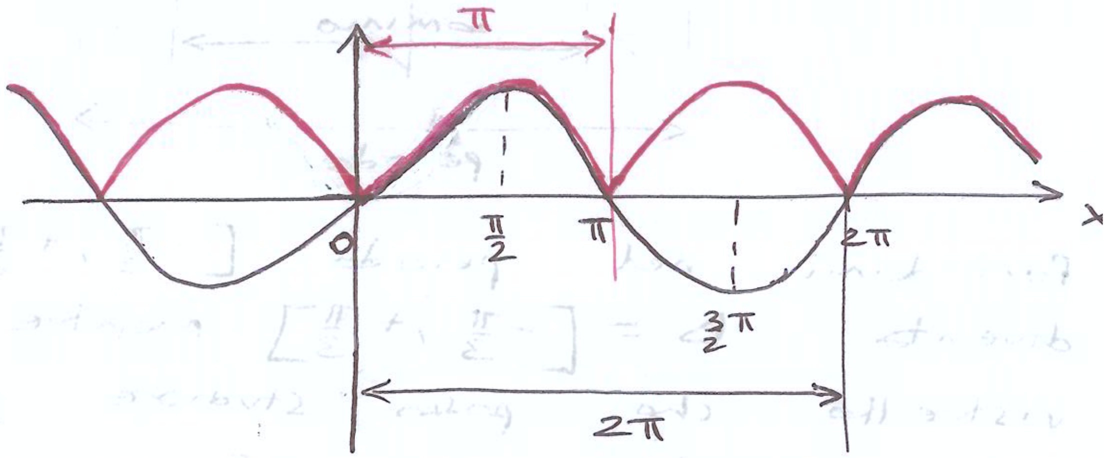



Il periodo di $\cos x$ e' $2\pi$ ma il periodo di $\cos^2 x$ e' invece $\pi$. Quindi la funzione interna ha

$\boxed{\text{periodo} = \pi}$

$\sin x$

$\boxed{|\sin x|}$



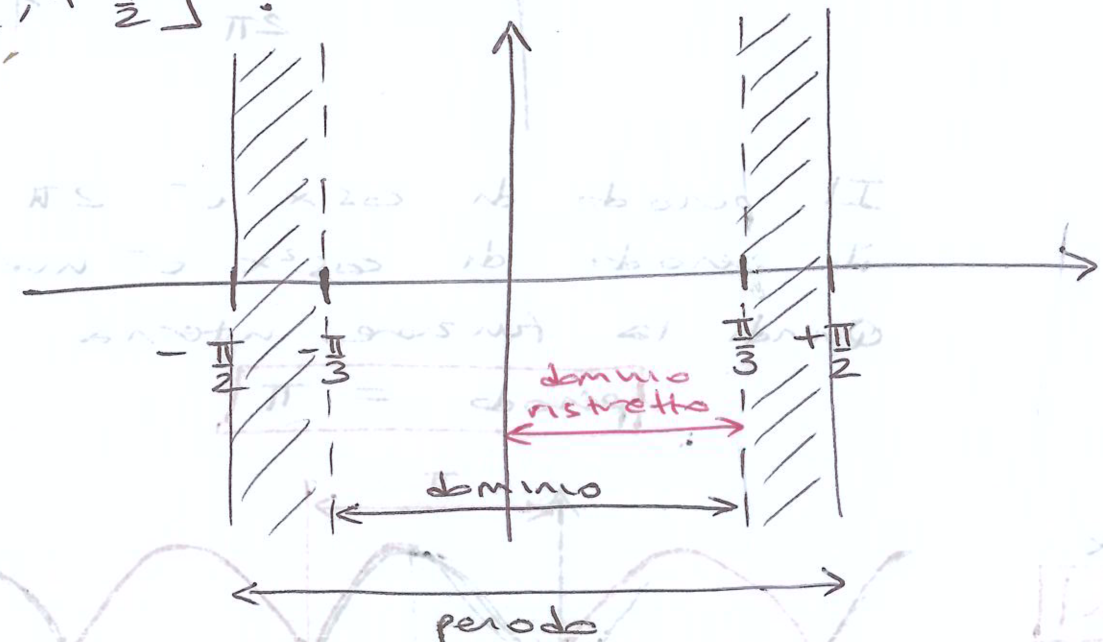

Anche in questo caso il periodo di $\sin x$ e' $2\pi$. ma il periodo di $|\sin x|$ e' invece $\pi$. Quindi la funzione interna ha:

$\boxed{\text{periodo} = \pi}$

Essendo la funzione $f(x)$ composta da funzioni periodiche che presentano lo stesso periodo ($\pi$) allora anch'essa sarà una funzione periodica:

$$\boxed{f(x) \text{ periodica} \longrightarrow \text{periodo} = \pi}$$

Posso quindi concentrarmi sullo studio di un'unico periodo, per esempio $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$:




Ponendomi nel periodo $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ il dominio diventa $D = [-\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}]$ mentre il dominio ristretto che posso studiare grazie anche alla simmetria pari è:

$$\boxed{D' = [0, \frac{\pi}{3}]}$$

## (d) Segno

$$f(x) = \sqrt{4\cos^2 x - 1} + |\sin x| \geq 0$$

Si può verificare facilmente che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in D$ perché è data dalla somma di una radice pari, la quale è sempre positiva, e di un modulo, che per definizione è sempre positivo. Cioè:

$$\boxed{f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D}$$

## (e) Limiti agli estremi del dominio

$$D' = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

$f(x)$ è continua agli estremi del dominio quindi i limiti coincidono con il valore della funzione nei punti in cui calcolo i limiti stessi:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \sqrt{4\cos^2(0) - 1} + \cancel{|\sin(0)|}$$

$$= \sqrt{4 \cdot (1)^2 - 1} + 0$$

$$= \sqrt{4 - 1} = \boxed{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{4\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 - 1} + \left|\sin \frac{\pi}{3}\right|$$

$$= \sqrt{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$= \sqrt{\cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} - 1} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \cancel{\sqrt{1 - 1}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Non sono presenti asintoti, ne' orizzontali ne' verticali.

## (F) Continuita'

La funzione $f(x)$ e' continua nel suo dominio perche' data dalla combinazione di funzioni continue.

## (G) Derivata

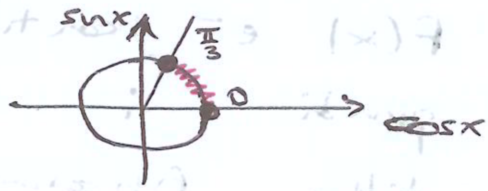
Se considero il dominio ristretto:

$$D' = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

si puo' osservare che per tali angoli il seno e' sempre positivo cioe':

$$\sin(x) > 0 \quad \forall\, x \in D'$$

$$|\sin(x)| = \sin x$$




La funzione $f(x)$ diventa:

$$f(x) = \sqrt{4\cos^2(x) - 1} + \sin(x)$$

calcolo la derivata:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{4\cos^2(x)-1}} \cdot 4 \cdot 2\cos(x)(-\sin x)\right) + \cos x$$

$$= \frac{-\cancel{8}^{4}\cos x \sin x}{\cancel{2}\sqrt{4\cos^2 x - 1}} + \cos x$$

$$= \cos x\left(\frac{-4\sin x}{\sqrt{4\cos^2 x - 1}} + 1\right)$$

$$= \cos x\left(\frac{\sqrt{4\cos^2 x - 1} - 4\sin x}{\sqrt{4\cos^2 x - 1}}\right)$$

Il dominio della derivata è:

$$4\cos^2 x - 1 > 0 \qquad 4\cos^2 x > 1$$

Cioè $D = \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, +\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$ che ristretto diventa:

$$\boxed{D' = \left[0, \frac{\pi}{3}\right)} \rightarrow \text{dominio della derivata}$$

In $x = \frac{\pi}{3}$ infatti $f'(x)$ non è definita perché il denominatore è 0. Quindi la funzione $f(x)$ non è derivabile in tutto il suo dominio perché presenta dei punti di non derivabilità in:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + k\pi} \rightarrow \underline{\text{punti di non derivabilità}}$$

(h) Limiti della derivata

Calcolo i limiti di $f'(x)$ agli estremi del dominio:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \cos x\left(\frac{\sqrt{4\cos^2 x - 1} - 4\sin x}{\sqrt{4\cos^2 x - 1}}\right)$$

$\downarrow$

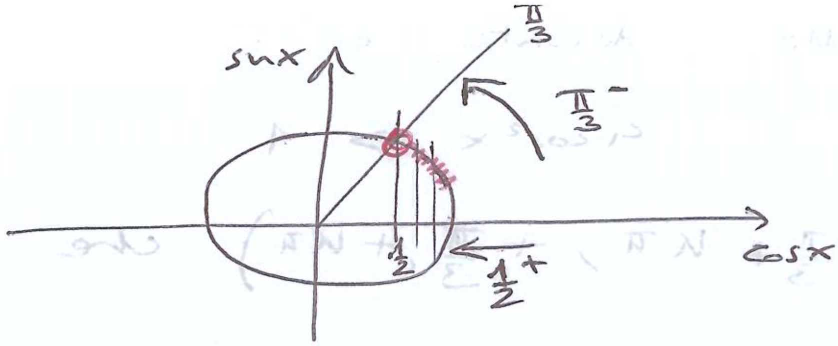
$|\sin x| = \sin x$

$$= 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{4-1} - 0}{\sqrt{4-1}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to \frac{\pi}{3}^-} f'(x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}^-} \cos x\left(\frac{\sqrt{4\cos^2 x - 1} - 4\sin x}{\sqrt{4\cos^2 x - 1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}} - 1} - 4\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}} - 1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{-\cancel{4}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{0^+} = -\frac{\sqrt{3}}{0^+} = \frac{-\sqrt{3}\cdot +\infty}{1} = -\infty$$




se $x \to \frac{\pi}{3}^-$

$\Downarrow$

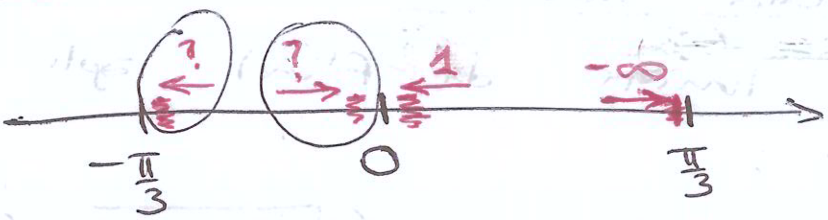
$\cos x \to \frac{1}{2}^+$

Visto che per il calcolo della derivata sono state sfruttate le simmetrie e quindi è stata studiata solo una parte del dominio è utile andare a calcolare i limiti di $f'(x)$ anche nelle restanti zone del dominio:

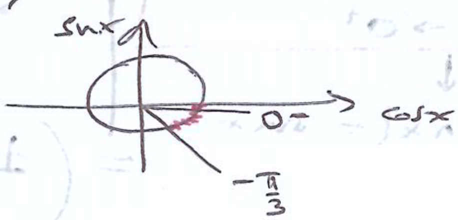
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) \ ?$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{3}^+} f'(x) \ ?$$

$f'(x)$




Tuttavia per $x \to 0^-, -\frac{\pi}{3}$, si ha:




$\sin x < 0$

$\Downarrow$

$|\sin x| = -\sin x$

$$f(x) = \sqrt{4\cos^2 x - 1} - \sin x$$

$$f'(x) = \frac{-4\cos x \sin x}{\sqrt{4\cos^2 x - 1}} - \cos x = -\cos x \left( \frac{4 \sin x}{\sqrt{4\cos^2 x - 1}} + 1 \right) = -\cos x \left( \frac{\sqrt{4\cos^2 x - 1} + 4\sin x}{\sqrt{4\cos^2 x - 1}} \right)$$

Ottengo :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f'(x)} = \lim_{x\to 0^-} -\cos x \left(\frac{\cancel{4\sin x} + \sqrt{4\cos^2 x - 1}}{\sqrt{4\cos^2 x-1}}\right)$$

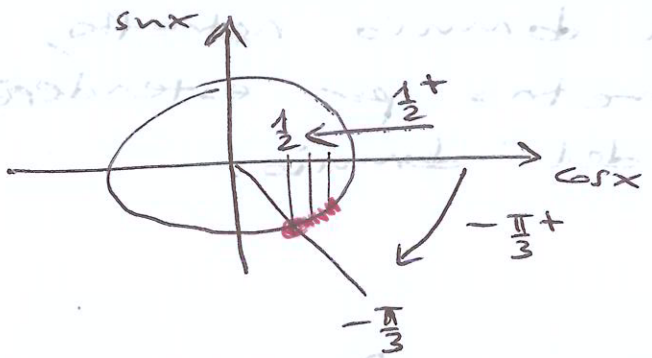
$$= -1\left(\frac{\sqrt{4-1}}{\sqrt{4-1}}\right) = -1\,\frac{\sqrt3}{\sqrt3} = -1$$

$$\boxed{\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}^+} f'(x)} = \lim_{x\to -\frac{\pi}{3}^+} -\cos x \left(\frac{4\sin x + \sqrt{4\cos^2 x - 1}}{\sqrt{4\cos^2 x-1}}\right)$$

$$= -\frac12\left(\frac{4\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right) + \sqrt{\cancel{4}\,\frac{1}{\cancel{4}}-1}}{\sqrt{\cancel{4}\,\frac{1}{\cancel{4}}-1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{-\frac{\cancel{4}\sqrt3}{\cancel{2}} + 0}{0^+}\right)$$

$$= +\frac{\sqrt3}{0^+} = \sqrt3\,+\infty = +\infty$$

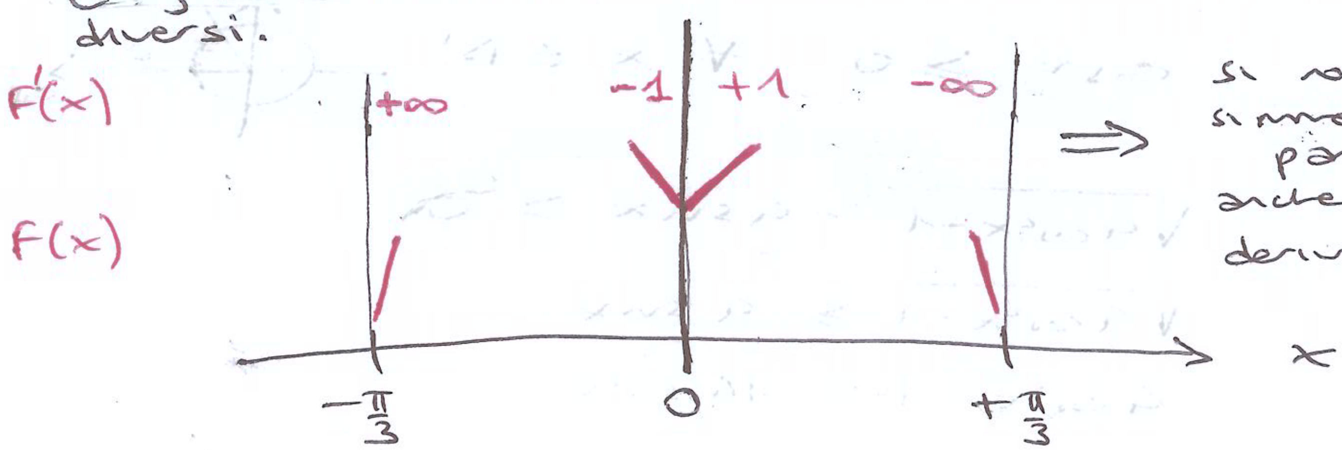



se $x \to -\frac{\pi}{3}^+$

$\Downarrow$

$\cos x \to \frac{1}{2}^+$

Quindi è necessario fare attenzione con i limiti delle derivate quando si sfruttano le simmetrie, perché la simmetria è geometrica ~~non~~ tra i valori dei limiti, che sono diversi.




$\Longrightarrow$ si nota la simmetria pari anche nelle derivate

Si osserva che la funzione presenta un'altro punto di non derivabilità oltre ad $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. Infatti in $x = 0$ si ha:

$$\begin{cases} f'(x) = 1 & \text{per } x \to 0^+ \\ f'(x) = -1 & \text{per } x \to 0^- \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f'(x)^+ \neq f'(x)^- \quad \text{per } x = 0}$$

significa che in $x = 0$ ho un $\boxed{\text{punto angoloso}}$, derivata sinistra e destra sono entrambe finite ma diverse tra di loro.

## (i) Monotonia e punti di estremo

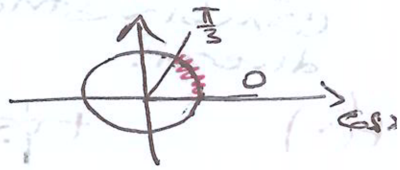
Limito lo studio al dominio ristretto, poi sfrutterò la simmetria per estendere i risultati al resto del dominio.

$$D' = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$f'(x) = \cos x \left( \frac{\sqrt{4\cos^2 x - 1} - 4\sin x}{\sqrt{4\cos^2 x - 1}} \right)$$

$N \geq 0 \quad \cos x \left( \sqrt{4\cos^2 x - 1} - 4 \sin x \right) \geq 0$

$\cos x \geq 0 \quad \forall\, x \in D'$

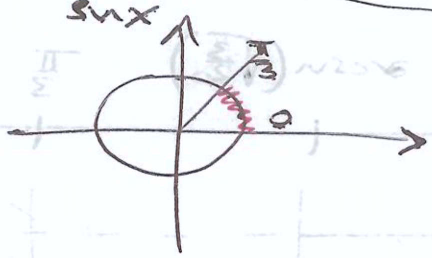



$$\sqrt{4\cos^2 x - 1} - 4\sin x \geq 0$$

$$\sqrt{4\cos^2 x - 1} \geq 4\sin x$$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{4\cos^2 x - 1}\right)^2 \geq (4\sin x)^2 \\ 4\cos^2 x - 1 \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

$4\cos^2 x - 1 \geq 0 \longrightarrow$ condizione già imposta per trovare il dominio quindi è già verificata in D'




$\Longrightarrow \sin x \geq 0 \quad \forall x \in D'$

$$\Downarrow$$

$$4\cos^2 x - 1 \geq 16\sin^2 x$$

$$16\sin^2 x - 4\cos^2 x + 1 \leq 0$$

$$(\cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$$

$$16\sin^2 x - 4(1 - \sin^2 x) + 1 \leq 0$$

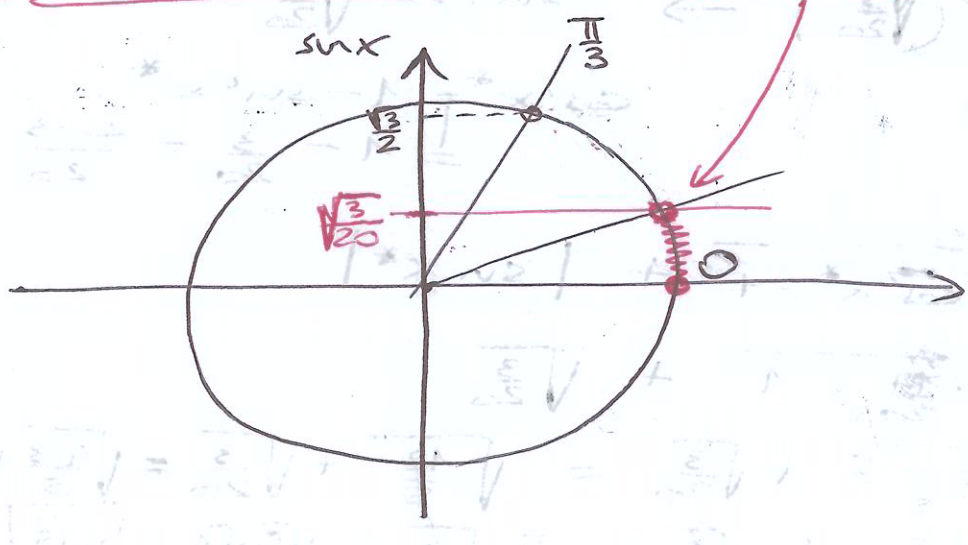
$$20\sin^2 x - 4 + 1 \leq 0$$

$$20\sin^2 x - 3 \leq 0 \longrightarrow \sin^2 x \leq \frac{3}{20}$$

$$\sin x = t \longrightarrow t^2 \leq \frac{3}{20} \longrightarrow -\sqrt{\frac{3}{20}} \leq t \leq \sqrt{\frac{3}{20}}$$

$-\sqrt{\frac{3}{20}} \leq \sin x \leq \sqrt{\frac{3}{20}} \longrightarrow$ ma $\sin x \geq 0 \quad \forall x \in D'$

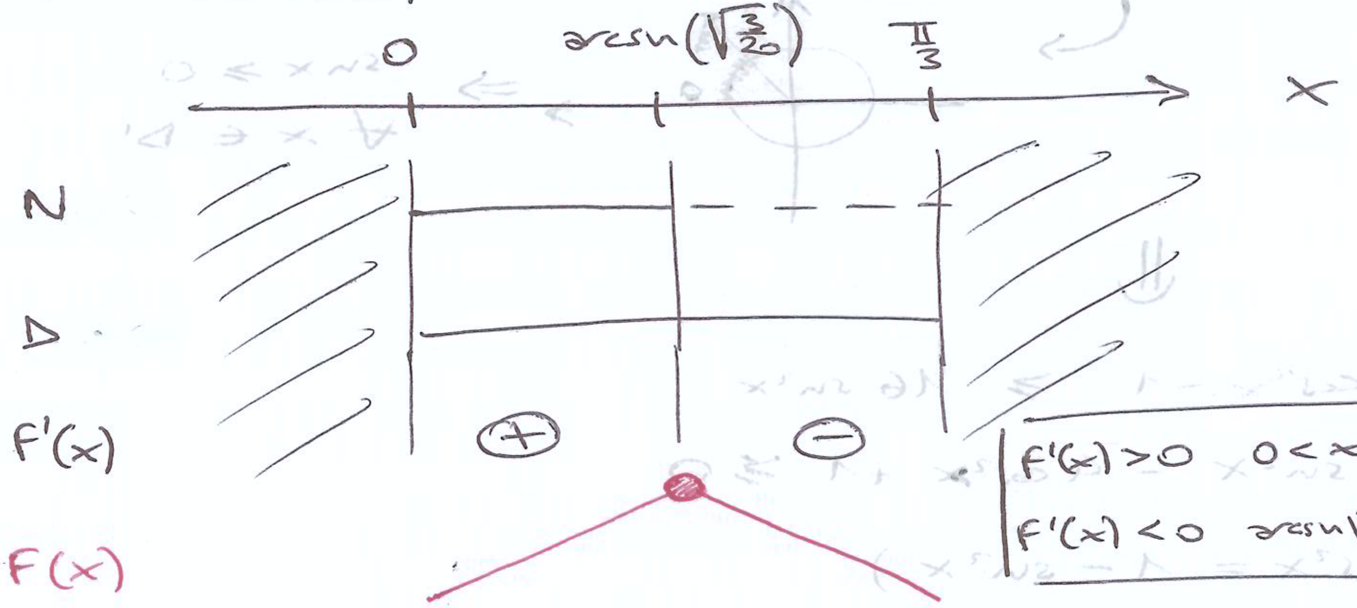
$$\boxed{0 \leq \sin x \leq \sqrt{\frac{3}{20}}} \Longrightarrow \boxed{0 \leq x \leq \arcsin\sqrt{\frac{3}{20}}}$$



$D > 0 \qquad \sqrt{4\cos^2 x - 1} > 0 \quad \forall x \in D$

↳ radice pari e' sempre positiva

Si ottiene:




$f'(x) > 0 \quad 0 < x < \arcsin\sqrt{\frac{3}{20}}$

$f'(x) < 0 \quad \arcsin\sqrt{\frac{3}{20}} < x < \frac{\pi}{3}$

E' presente quindi un punto di massimo relativo in:

$$x^* = \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{20}}\right) + k\pi$$ → per periodicità

$$x^* = -\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{20}}\right) + k\pi$$ ← per simmetria pari

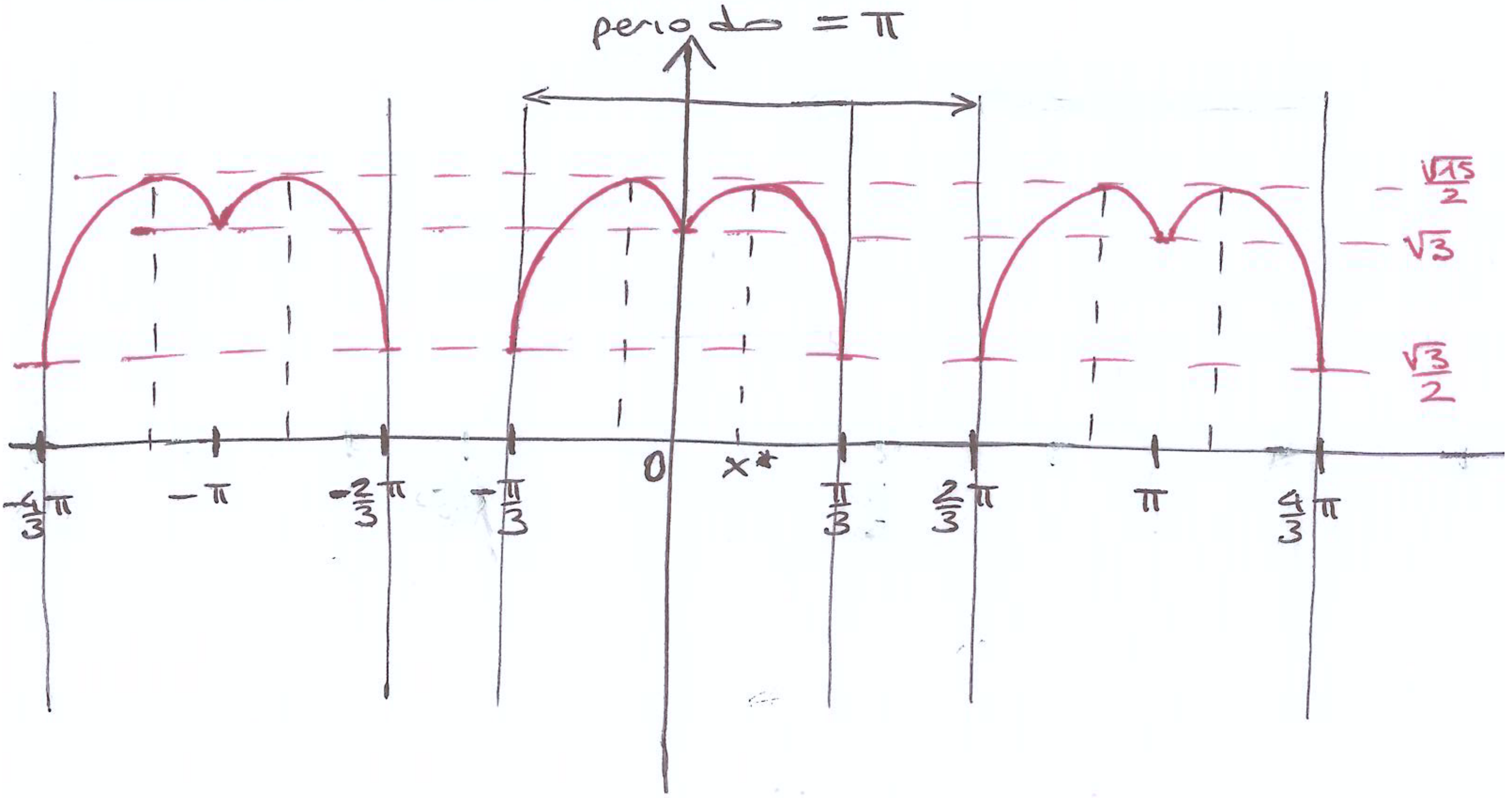
Il valore della funzione in tale punto e':

$$x^* = \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{20}}\right) \longrightarrow \sin x^* = \sqrt{\frac{3}{20}}$$

$$\cos^2 x^* = 1 - \sin^2 x^* = 1 - \frac{3}{20} = \frac{20-3}{20} = \frac{17}{20}$$

$$f(x^*) = \sqrt{4\cos^2 x^* - 1} + |\sin x^*| = \sqrt{\cancel{4}\cdot\frac{17}{\cancel{20}_5} - 1} + \sqrt{\frac{3}{20}} = \sqrt{\frac{17-5}{5}} + \sqrt{\frac{3}{20}} = \sqrt{\frac{12}{5}} + \sqrt{\frac{3}{20}} = \sqrt{\frac{4\cdot 3}{5}} + \sqrt{\frac{3}{4\cdot 5}} = 2\cdot\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

## Grafico della funzione

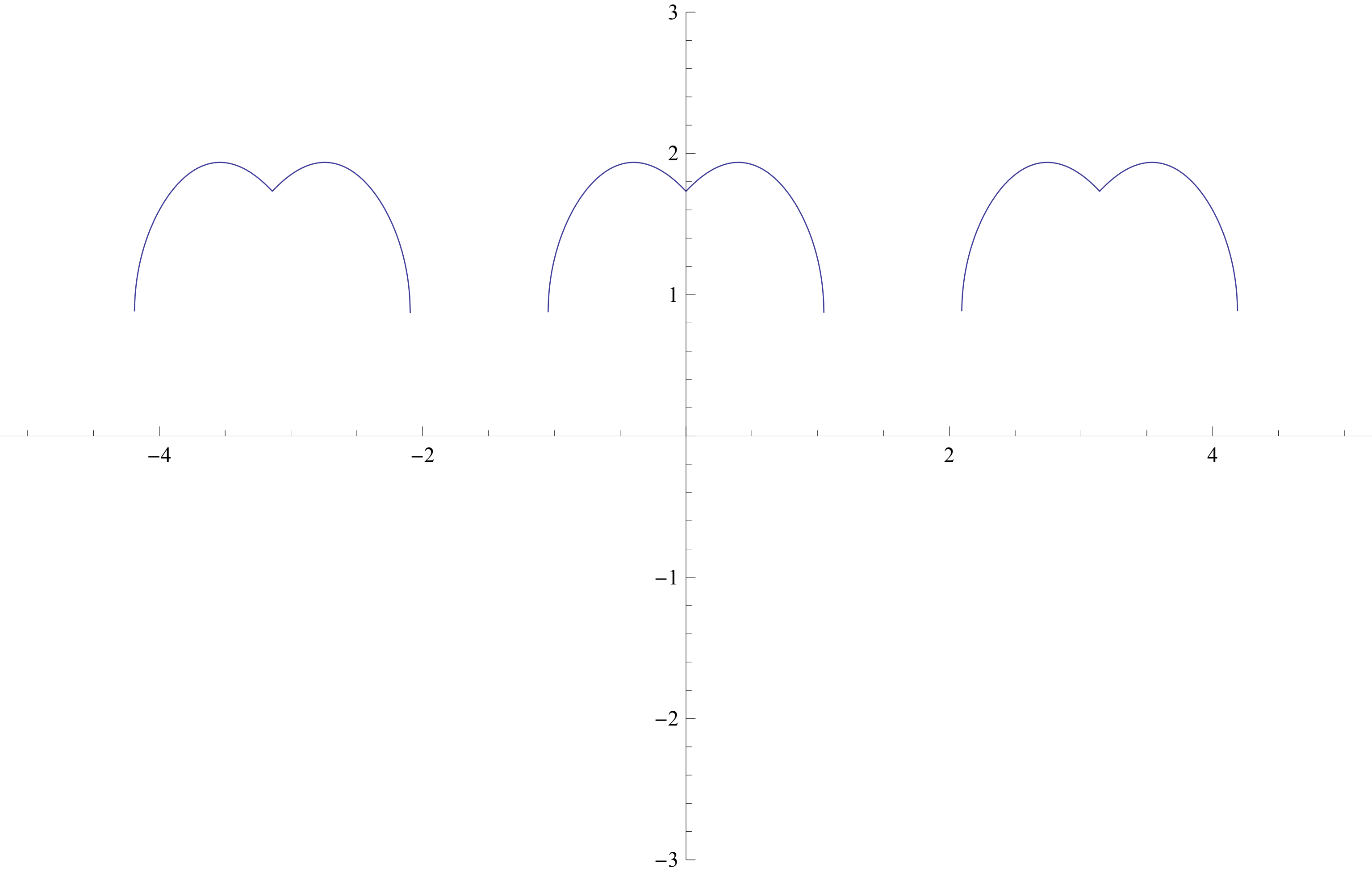



Si osserva dal grafico che la funzione presenta infiniti punti di massimo assoluto:

$\boxed{f_{MAX} = \frac{\sqrt{15}}{2}}$ $\left( < \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \right)$ $x = \pm \arcsin\sqrt{\frac{3}{20}} + K$

E infiniti punti di minimo assoluto

$\boxed{f_{MIN} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ : per $x = \pm \frac{\pi}{3} + K\pi$


3
2
1
−1
−2
−3
−4
−2
2
4