

Cenni di soluzione sui primi esercizi tratti di funzioni

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + x^3 + 1}{(3^2)^x + 5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}\right)}{9^x \left(1 + \left(\frac{5}{9}\right)^x\right)} =$$

(per la gerarchia
degli infiniti $\frac{x^4}{9^x} \rightarrow 0$) $= 0$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\quad) \rightarrow +\infty$$

non è una
forma d'indeterminazione
perché è del tipo
 $\frac{+\infty}{0+}$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x} \frac{\sin x}{\sin x}$$

se $x \rightarrow 0$ $\sin x \rightarrow 0$ $\frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \rightarrow 1$
(limite notevole)

se $x \rightarrow 0$ $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$

quindi $\lim(\dots) = 1$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^4 \log(x^5 + x^2) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^4 \log(x^2(x^3 + 1)) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^4 \log x^2 + 4x^4 \log(1 + x^3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{8x^4 \log x}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{(limite notevole)}}} + \underbrace{4x^4 \log(1 + x^3)}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{(no forma indeterminata)}}$$

N.B se $x \rightarrow 0$ bisogna
raccolgere la potenza minore
per es. $x^5 + x^2 = x^2(x^3 + 1)$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\sin x}}{\log(1+3x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} (e - 1)}{\log(1+3x)} \cdot \frac{3x}{3x}$$

log(1+y) → 1 limite notevole

se $x \rightarrow 0$ $1 - \cos x - \sin x \rightarrow 0$
 usiamo il limite notevole $\frac{e^y - 1}{y} \rightarrow 1$ se $y \rightarrow 0$

con $y = 1 - \cos x - \sin x$

Allora $\frac{e^{1 - \cos x - \sin x} - 1}{1 - \cos x - \sin x} \rightarrow 1$ se $x \rightarrow 0$

Quindi ho:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} (e - 1)}{\log(1+3x)} \cdot \frac{3x}{1 - \cos x - \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x - \sin x}{3x}$$

1 *1* *1*

$$\frac{1 - \cos x - \sin x}{3x} = \frac{1 - \cos x}{3x} - \frac{\sin x}{3x} =$$

$$= \frac{1 - \cos x}{3x^2} \cdot x - \frac{1}{3} \frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ limite notevole} - \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}$$

se $x \rightarrow 0$

Mettendo tutto insieme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\sin x} (e - 1)}{\log(1+3x)} \cdot \frac{3x}{1 - \cos x - \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x - \sin x}{3x} \right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x \log x}$$

$$x^{x \log x} = e^{x \log x \cdot \log x}$$

Guardiamo l'esponente

$$x \log x \log x = x (\log x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

(cune nota bene $x^a (\log x)^b \rightarrow 0$ $x \rightarrow 0$)

$$\text{Quindi } \lim () = e^0 = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} |\log x|^{1/x}$$

$$|\log x|^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \log(|\log x|)}$$

$$|\log x|^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \log(|\log x|)}$$

Guardiamo l'esponente

$$\frac{1}{x} \log(|\log x|) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

(non è forma indeterminata)

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow 0^+} () = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^5 + \sqrt{x} + 2x}{x + \log(e^x + 2) + \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5 \log x}{x})}{x + \log(e^x(1 + \frac{2}{e^x})) + \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5 \log x}{x})}{x + \log e^x + \log(1 + \frac{2}{e^x}) + \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5 \log x}{x})}{x(1 + 1 + \frac{1}{x} \log(1 + \frac{2}{e^x}) + \frac{\sin x}{x})}$$

(no forma indeterminata)

$$= \frac{2}{2} = 1$$

g)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) \operatorname{sen} \frac{5}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \operatorname{sen} \frac{5}{x}$$

e $x \operatorname{sen} \frac{5}{x}$ cambio variabile
se $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{x} = y \quad y \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \frac{5}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \operatorname{sen} \left(\frac{y}{5}\right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5}{y} \cdot \frac{1}{5} \operatorname{sen} \frac{y}{5} = \frac{1}{5}$$

ATTENZIONE:
qui si ha $\sin(5y)$
per cui il risultato è 5

limite notevole
 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \rightarrow 1$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\quad) = \frac{1}{5}$$

S. prepa di segnalare eventuali
errori !!!