SOLUZIONE

1. (a) Per provare che $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}$ è una primitiva di $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ sull'intervallo $(-2,2)$ è sufficiente provare che $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in (-2,2)$.

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2}\,\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} + 2\,\frac{1/2}{\sqrt{1-x^2/4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2}{2\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2+4}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} = f(x).$$

(b) Sicuramente $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$, in quanto differisce da $F(x)$ solo per la costante $-\frac{\pi}{3}$.
Controlliamo che $G(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$G(1) = \frac{1}{2}\sqrt{4-1} + 2\arcsin\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\,\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $F(x)$ e $G(x)$ sono entrambe derivabili su $\mathbb{R}$. Sono entrambe primitive di una stessa funzione $f(x)$ se si ha $F'(x) = G'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate:

$F'(x) = 2\sin x\cos x = \sin(2x)$, $\quad G'(x) = -\frac{1}{2}\,(-2)\sin(2x) = \sin(2x)$.

Dunque $F'(x) = G'(x) = f(x) = \sin(2x)$.

Essendo due primitive della stessa funzione sullo stesso intervallo, la loro differenza deve essere costante.
Calcoliamone la differenza:

$F(x) - G(x) = \sin^2 x + 7 + \frac{1}{2}\cos(2x) + 11 = \sin^2 x + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + 18 = 18 + \frac{1}{2} = \frac{37}{2}$.

3. (a) $\displaystyle\int \sqrt{2x+5}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2(2x+5)^{1/2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{(2x+5)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+5)^3} + c$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\cdot(x^2+5)^{-3/2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+5)^{-1/2}}{-1/2} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} + c$

(c) $\displaystyle\int x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\frac{(8+x^4)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + c = -\frac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^4)^2}} + c$

(d) $\displaystyle\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\ \mathrm{d}x = 3\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\ \mathrm{d}x = 3\arctan(e^x) + c$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1/x}{\sqrt{1-(\log x)^2}}\ \mathrm{d}x = \arcsin(\log x) + c$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^{2/3}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}(\log x)^{-2/3}\ \mathrm{d}x = \frac{(\log x)^{1/3}}{1/3} + c = 3\sqrt[3]{\log x} + c$

(g) $\displaystyle\int xe^{x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

(h) $\displaystyle\int \tan x\ \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ \mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\ \mathrm{d}x = -\log|\cos x| + c$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin 2x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sin x\cos x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\tan x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log|\tan x| + c$

(j) $\displaystyle\int 7x\cos(3x^2-5)\ \mathrm{d}x = \frac{7}{6}\int 6x\cos(3x^2-5)\ \mathrm{d}x = \frac{7}{6}\sin(3x^2-5) + c$

(k) $\displaystyle\int \cos x\sqrt{\sin x}\ \mathrm{d}x = \int \cos x(\sin x)^{1/2}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + c$

(l) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(3x^2+5)}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{\cos^2(3x^2+5)}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\tan(3x^2+5) + c$

4. Ricordiamo la regola di integrazione per parti:

$$\int f'(x) \cdot g(x) \ \mathrm{d}x \ = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \ \mathrm{d}x$$

(a) Per ricavare $\int x \sin x \ \mathrm{d}x$ scegliamo $\begin{cases} f'(x) = \sin x \\ g(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = -\cos x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$

Otteniamo:

$\int x \sin x \ \mathrm{d}x \ = -x \cos x - \int (-\cos x) \ \mathrm{d}x \ = -x \cos x + \sin x + c$

(b) Per ricavare $\int 2xe^{-x} \ \mathrm{d}x \ = 2 \int xe^{-x} \ \mathrm{d}x$, conviene scegliere $\begin{cases} f'(x) = e^{-x} \\ g(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = -e^{-x} \\ g'(x) = 1 \end{cases}$

Dunque:

$2 \int xe^{-x} \ \mathrm{d}x \ = 2 \left(-x \cdot e^{-x} - \int (-e^{-x}) \ \mathrm{d}x \ \right) = 2(-x \cdot e^{-x} - e^{-x}) + c = -2e^{-x}(x+1) + c.$

(c) In questo caso conviene vedere la funzione integranda $\log(1+x)$ come prodotto della funzione costante 1 per la funzione $\log(1+x)$ e scegliere $\begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \log(1+x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x} \end{cases}$.

Pertanto $\int \log(1+x) \ \mathrm{d}x \ = x \log(1+x) - \int \dfrac{x}{1+x} \ \mathrm{d}x$.

Per calcolare l'ultimo integrale, conviene prima eseguire un "trucco" algebrico, e poi sfruttare la linearità dell'integrale; nel prossimo esercizio vedremo un procedimento più completo che tratta dell'integrazione delle funzioni razionali.

Per ora, scriviamo:

$\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{x+1-1}{1+x} = \dfrac{1+x}{1+x} - \dfrac{1}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x};$

dunque

$\int \dfrac{x}{1+x} \ \mathrm{d}x \ = \int \ \mathrm{d}x \ - \int \dfrac{1}{1+x} \ \mathrm{d}x \ = x - \log|1+x| + c.$

Tornando all'integrale di partenza, si ha:

$\int \log(1+x) \ \mathrm{d}x \ = x \log(1+x) - x + \log(1+x) + c.$

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la funzione integranda è definita solo per $x > -1$.

(d) $\int 2x \log(x-5) \ \mathrm{d}x \ = x^2 \log(x-5) - \int \dfrac{x^2}{x-5} \ \mathrm{d}x$

Anche in questo caso, manipoliamo l'ultima funzione razionale, nel seguente modo:

$\dfrac{x^2}{x-5} = \dfrac{x^2-25+25}{x-5} = \dfrac{x^2-25}{x-5} + \dfrac{25}{x-5} = \dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5} + \dfrac{25}{x-5} = x + 5 + \dfrac{25}{x-5}.$

Pertanto

$\int 2x \log(x-5) \ \mathrm{d}x \ = x^2 \log(x-5) - \int \left(x + 5 + \dfrac{25}{x-5} \right) \ \mathrm{d}x \ = x^2 \log(x-5) - \dfrac{x^2}{2} - 5x - 25 \log|x-5| + c$

La funzione integranda è definita solo per $x > 5$; pertanto si avrà $|x-5| = x-5$. Dunque

$\int 2x \log(x-5) \ \mathrm{d}x \ = x^2 \log(x-5) - \dfrac{x^2}{2} - 5x - 25 \log(x-5) + c.$

(e) $\int x \log^2(5x) \ \mathrm{d}x \ = \dfrac{x^2}{2} \log^2(5x) - \int \dfrac{x^2}{2} 2 \log(5x) \dfrac{5}{5x} \ \mathrm{d}x \ = \dfrac{x^2}{2} \log^2(5x) - \int x \log(5x)$

Riapplicando nuovamente la formula di integrazione per parti all'ultimo integrale, ricaviamo

$\int x \log^2(5x) \ \mathrm{d}x \ = \dfrac{x^2}{2} \log^2(5x) - \left(\dfrac{x^2}{2} \log(5x) - \dfrac{1}{2} \int x \ \mathrm{d}x \ \right) = \dfrac{x^2}{2} \log^2(5x) - \dfrac{x^2}{2} \log(5x) + \dfrac{x^2}{4} + c$

(f) $\displaystyle\int (x+1)^2\cos x \ \mathrm{d}x \ = (x+1)^2\sin x - \int 2(x+1)\sin x \ \mathrm{d}x \ = (x+1)^2\sin x + 2\left[(x+1)\cos x - \int \cos x \ \mathrm{d}x\ \right] =$

$= (x+1)^2\sin x + 2(x+1)\cos x - 2\sin x + c.$

(g) $\displaystyle\int 2x\arctan x \ \mathrm{d}x \ = x^2\arctan x - \int x^2\frac{1}{x^2+1} \ \mathrm{d}x \ = x^2\arctan x - \int \frac{x^2+1\ -1}{x^2+1} \ \mathrm{d}x \ =$

$\displaystyle= x^2\arctan x - \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) \ \mathrm{d}x \ = x^2\arctan x - x + \arctan x + c$

(h) $\displaystyle\int e^x\sin x \ \mathrm{d}x \ = e^x\sin x - \int e^x\cos x \ \mathrm{d}x \ = e^x\sin x - \left(e^x\cos x + \int e^x\sin x \ \mathrm{d}x\ \right).$

Dunque

$\displaystyle 2\int e^x\sin x \ \mathrm{d}x \ = e^x\sin x - e^x\cos x$

da cui

$$\int e^x\sin x \ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + c.$$

(i) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x \ = x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \ \mathrm{d}x \ = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}} \ \mathrm{d}x \ =$

$\displaystyle= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x \ + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \mathrm{d}x$

Dunque

$\displaystyle 2\int \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x \ = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$

da cui

$$\int \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$$

Lo stesso integrale può essere risolto per sostituzione (si veda l'esercizio n. 6).

5. (a) Per risolvere gli integrali di funzioni razionali, occorre anzitutto che il grado del numeratore sia strettamente inferiore al grado del denominatore. Se non lo è, bisogna procedere con la divisione dei polinomi.

Procediamo dunque alla divisione del polinomio a numeratore per il polinomio a denominatore e troviamo
$\displaystyle\frac{2x^2-3x+7}{x-5} = 2x+7+\frac{42}{x-5}.$

Dunque

$$\int \frac{2x^2-3x+7}{x-5} \ \mathrm{d}x \ = \int\left(2x+7+\frac{42}{x-5}\right) \ \mathrm{d}x \ = \int (2x+7) \ \mathrm{d}x \ + \int \frac{42}{x-5} \ \mathrm{d}x \ = x^2+7x+42\log|x-5|+c.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8} \ \mathrm{d}x \ = \int \frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} \ \mathrm{d}x\ .$

Con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene:

$$\frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-4B}{(x-4)(x-2)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-4B=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} A=4 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Quindi:
$$\frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} = \frac{4}{x-4} - \frac{1}{x-2}.$$
Dunque:
$$\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8}\ \mathrm{d}x\ = \int \left[\frac{4}{x-4} - \frac{1}{x-2}\right]\ \mathrm{d}x\ = 4\log|x-4| - \log|x-2| + c.$$

(c) Per calcolare
$$\int \frac{3x}{x^3-1}\ \mathrm{d}x$$
possiamo usare direttamente il metodo di decomposizione in fratti semplici, in quanto il grado del numeratore è strettamente inferiore al grado del denominatore; dobbiamo scomporre il denominatore come prodotto di fattori irriducibili. Ricordando che $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ e usando il metodo di decomposizione in fratti semplici, possiamo scomporre la frazione da integrare:
$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$
Uguagliando i numeratori della frazione iniziale e finale, si trova il sistema:
$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ A-B+C &= 3 \\ A-C &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 1 \end{cases}.$$
Quindi:
$$\int \frac{3x}{x^3-1}\ \mathrm{d}x\ = \int \frac{1}{x-1}\ \mathrm{d}x\ - \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x\ = \log|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x\ + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x\ =$$
$$= \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x\ .$$
Per risolvere l'ultimo integrale, usiamo il metodo di "completamento dei quadrati", allo scopo di ottenere il denominatore nella forma $k[1+(ax+b)^2]$ (dove k, a, b sono costanti opportune da trovare).
$$x^2+x+1 = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4}\left[1+\tfrac{4}{3}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2\right] = \tfrac{3}{4}\left[1+\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right].$$
Pertanto
$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x\ = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}\ \mathrm{d}x\ = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\ \mathrm{d}x\ = \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$
Infine
$$\int \frac{3x}{x^3-1}\ \mathrm{d}x\ = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

(d) Il polinomio x^3+2x^2+x+2 ammette la radice $x=-2$; dunque è divisibile per $x+2$. Effettuando i calcoli si trova $x^3+2x^2+x+2=(x+2)(x^2+1)$.
Dunque
$$\int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\ \mathrm{d}x\ = \int \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\ \mathrm{d}x\ .$$
Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.
$$\frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+A+2C}{(x+2)(x^2+1)}.$$

Uguagliando i polinomi a numeratore della prima e dell'ultima frazione, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 2B+C &= 9 \\ A+2C &= 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= -2 \\ B &= 2 \\ C &= 5 \end{cases}.$$

Pertanto:

$$\int \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\ \mathrm{d}x \ = \int \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2x+5}{x^2+1} \right)\ \mathrm{d}x \ = \int \frac{-2}{x+2}\ \mathrm{d}x\ + \int \frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\ + \int \frac{5}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\ =$$

$$= -2\log|x+2| + \log(x^2+1) + 5\arctan x + c = \log\frac{x^2+1}{(x+2)^2} + 5\arctan x + c.$$

(e) Poiché il grado del polinomio al numeratore è superiore a quello del denominatore, occorre preliminarmente procedere alla divisione dei due polinomi.
Si ottiene

$$\frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1} = x^3-3x^2+x-3+\frac{2x}{x^2-1}.$$

Pertanto

$$\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\ \mathrm{d}x \ = \int \left(x^3-3x^2+x-3\right)\ \mathrm{d}x\ + \int \frac{2x}{x^2-1}\ \mathrm{d}x\ = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + \log|x^2-1| + c.$$

(f) Effettuando la necessaria divisione tra il polinomio a numeratore e quello a denominatore, si ottiene

$$\frac{x^5-x+1}{x^4+x^2} = x - \frac{x^3+x-1}{x^4+x^2}$$

Dunque

$$\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\ \mathrm{d}x \ = \int \left(x - \frac{x^3+x-1}{x^4+x^2}\right)\ \mathrm{d}x \ = \int x\ \mathrm{d}x\ - \int \frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)}\ \mathrm{d}x\ .$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Procedendo come sopra, si ottiene

$$\begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 0 \\ D &= 1 \end{cases}.$$

Dunque:

$$\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\ \mathrm{d}x \ = \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1}\right)\ \mathrm{d}x \ = \frac{x^2}{2} - \log|x| - \frac{1}{x} - \arctan x + c.$$

6. (a) L'integrale

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ \mathrm{d}x$$

può essere trasformato nell'integrale di una funzione razionale effettuando la sostituzione $e^x = t$, da cui $x = \log t$ e $\mathrm{d}x\ = \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$.

Pertanto

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\ \mathrm{d}x \ = \int \frac{t}{t^2-3t+2}\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \ = \int \frac{1}{t^2-3t+2}\ \mathrm{d}t \ = \int \frac{1}{(t-1)(t-2)}\ \mathrm{d}t\ .$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale il cui denominatore è decomposto in fattori irriducibili. Usiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{(t-2)(t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t-2)}{(t-1)(t-2)} = \frac{(A+B)t - A - 2B}{(t-1)(t-2)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ -A-2B &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \end{cases}.$$

Pertanto

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right)\,\mathrm{d}t = \log|t-2| - \log|t-1| + c = \log|e^x - 2| - \log|e^x - 1| + c.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} + 2}\,\mathrm{d}x\,.$

Effettuando, come sopra, la sostituzione $e^x = t$, da cui $x = \log t$ e $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, si ottiene

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t} + 2}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t^2+1+2t}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)^2}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t-1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene:

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)} = \frac{(A+B)t + A}{t(t+1)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ A = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}.$$

Dunque:

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{2}{t+1}\right)\,\mathrm{d}t = -\log|t| + 2\log|t+1| + c = -\log|e^x| + 2\log|e^x+1| + c =$$
$$= \log(e^x+1)^2 - x + c.$$

(c) L'integrale $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\,\mathrm{d}x$, può essere ricondotto ad un integrale di funzione razionale operando la sostituzione $\sqrt{x-1} = t$, da cui $x = 1 + t^2$ e $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

Pertanto

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2+t+1}{t^2-4}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^3+t^2+t}{t^2-4}\,\mathrm{d}t\,.$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ottiene $\displaystyle\frac{t^3+t^2+t}{t^2-4} = t + 1 + \frac{5t+4}{t^2-4}.$

Dunque:

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\,\mathrm{d}x = 2\int \left(t + 1 + \frac{5t+4}{(t-2)(t+2)}\right)\,\mathrm{d}t\,.$$

Decomponendo l'ultima frazione in fratti semplici, si ha:

$$\frac{5t+4}{(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2)+B(t-2)}{t^2-4} = \frac{(A+B)t + (2A-2B)}{t^2-4}.$$

Uguagliando i numeratori della prima e dell'ultima frazione si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 5 \\ 2A-2B &= 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= \frac{7}{2} \\ B &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dunque :

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\ \mathrm{d}x\ = 2\int (t+1)\ \mathrm{d}t\ + 2\int \left(\frac{7}{2}\frac{1}{t-2} + \frac{3}{2}\frac{1}{t+2}\right)\ \mathrm{d}t\ = t^2 + 2t + 7\log|t-2| + 3\log|t+2| + c =$$
$$= x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 7\log|\sqrt{x-1}-2| + 3\log|\sqrt{x-1}+2| + c.$$

(d) Per risolvere l'integrale $\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}\ \mathrm{d}x$, allo scopo di "eliminare i radicali " si può effettuare la sostituzione $2x = t^6$, da cui $\mathrm{d}x\ = 3t^5\ \mathrm{d}t$; in tal modo si ha $\sqrt{2x} = t^3$ e $\sqrt[3]{2x} = t^2$.
Dunque:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}\ \mathrm{d}x\ = \int \frac{3t^5}{t^3(t^2+1)}\ \mathrm{d}t\ = 3\int \frac{t^2}{t^2+1}\ \mathrm{d}t\ = 3\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\ \mathrm{d}t\ = 3t - 3\arctan t + c =$$
$$= 3\sqrt[6]{2x} - 3\arctan \sqrt[6]{2x} + c.$$

(e) L'integrale $\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$ è già stato risolto precedentemente per parti; si può anche effettuare la sostituzione $x = \sin t$, da cui e $\mathrm{d}x\ = \cos t\ \mathrm{d}t$.
La funzione $x = \sin t$ non è iniettiva; pertanto, per poter effettuare la sostituzione inversa, dobbiamo restringerci a un opportuno intervallo di integrazione; conviene scegliere l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, in cui oltre a invertire la funzione $x = \sin t$, trovando $t = \arcsin x$, è anche possibile ricavare $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Dunque

$$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x\ = \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t\ = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t\ = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + c = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + c =$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.$$

(f) Per risolvere l'integrale $\int \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x$ conviene effettuare la sostituzione $x = \sinh t$, da cui si ricava $\mathrm{d}x\ = \cosh t\ \mathrm{d}t$; si ha inoltre $\sqrt{1+x^2} = \cosh t$, tenendo conto che i due membri dell'ultima uguaglianza sono funzioni sempre positive. Dunque

$$\int \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x\ = \int \cosh^2 t\ \mathrm{d}t\ = \int \frac{(e^t+e^{-t})^2}{4}\ \mathrm{d}t\ = \int \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\ \mathrm{d}t\ = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} + 2t\right) + c =$$
$$= \frac{1}{4}\sinh(2t) + \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{2}\sinh t\cosh t + \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{settsinh}x + c.$$

(g) Per risolvere l'integrale $\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x$ conviene effettuare la sostituzione $x = \cosh t$, da cui si ricava $\mathrm{d}x\ = \sinh t\ \mathrm{d}t$.
Ponendoci su un opportuno intervallo di integrazione, possiamo invertire la funzione $x = \cosh t$; conviene scegliere l'intervallo $[0, +\infty)$, in cui si trova $t = \log(x + \sqrt{x^2-1})$. Inoltre è anche possibile ricavare $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$. Dunque

$$\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x\ = \int \sinh^2 t\ \mathrm{d}t\ = \int (\cosh^2 t - 1)\ \mathrm{d}t\ = \int \cosh^2 t\ \mathrm{d}t\ - t.$$

Sfruttando il risultato appena trovato sopra $\int \cosh^2 t\ \mathrm{d}t\ = \frac{1}{2}\sinh t\cosh t + \frac{1}{2}t + c$, si ha:

$$\int \sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x\ = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2-1}) + c.$$

(h) Per calcolare $\int \frac{2}{(1+\tan x)^2}\ \mathrm{d}x$, allo scopo di trasformarlo in un integrale di funzione razionale possiamo usare la sostituzione $\tan x = t$, da cui $x = \arctan t$ e $\mathrm{d}x\ = \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.
Quindi:

$$\int \frac{2}{(1+\tan x)^2}\ \mathrm{d}x \ = \int \frac{2}{(1+t)^2}\frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\ .$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.

$$\frac{2}{(1+t)^2(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}.$$

Procedendo come sopra, si ottiene

$$\begin{cases} A &= & 1 \\ B &= & 1 \\ C &= & -1 \\ D &= & 0 \end{cases}.$$

Dunque:

$$\int \frac{2}{(1+\tan x)^2}\ \mathrm{d}x \ = \int \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t \ + \int \frac{1}{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t \ - \int \frac{t}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \ = \log|1+t| - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + c =$$

$$= \log|1+\tan x| - \frac{1}{1+\tan x} - \frac{1}{2}\log(1+\tan^2 x) + c.$$

(i) Per risolvere l'integrale

$$\int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1}\sin x\ \mathrm{d}x$$

è consigliabile usare la sostituzione $\cos x = t$, da cui $\sin x\ \mathrm{d}x \ = \ \mathrm{d}t$. Pertanto

$$\int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1}\sin x\ \mathrm{d}x \ = \int \frac{t-3}{1-t^2-t^3+1}\ \mathrm{d}t \ = \int \frac{3-t}{t^3+t^2-2}\ \mathrm{d}t\ .$$

Il polinomio a denominatore ammette la radice $t = 1$ e si fattorizza in $t^3 + t^2 - 2 = (t-1)(t^2+2t+2)$. Ricorrendo alla decomposizione in fratti semplci, si trova

$$\frac{3-t}{(t-1)(t^2+2t+2)} = \frac{\frac{2}{5}}{t-1} + \frac{-\frac{2}{5}t - \frac{11}{5}}{t^2+2t+2}.$$

Dunque

$$\int \frac{3-t}{t^3+t^2-2}\ \mathrm{d}t \ = \frac{1}{5}\int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+11}{t^2+2t+2}\right)\ \mathrm{d}t \ = \frac{1}{5}\left(2\log|t-1| - \int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\ \mathrm{d}t \ - \int \frac{9}{1+(t+1)^2}\right)\ \mathrm{d}t \ =$$

$$= \frac{2}{5}\log|t-1| - \frac{1}{5}\log(t^2+2t+2) - \frac{9}{5}\arctan(t+1) + c.$$

Infine

$$\int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1}\sin x\ \mathrm{d}x \ = \frac{2}{5}\log|\cos x - 1| - \frac{1}{5}\log(\cos^2 x + 2\cos x + 2) - \frac{9}{5}\arctan(\cos x + 1) + c.$$

(j) L'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x}\ \mathrm{d}x$, può essere ricondotto ad un integrale di funzione razionale mediante le formule di razionalizzazione delle funzioni trigonometriche, cioè operando la sostituzione $\tan\frac{x}{2} = t$, da cui $x = 2\arctan t$ e $\mathrm{d}x \ = \dfrac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$; si ha inoltre $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Pertanto

$$\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x}\ \mathrm{d}x \ = \int \frac{1}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \ = \int \frac{2}{8t+3-3t^2}\ \mathrm{d}t \ = -2\int \frac{1}{(3t+1)(t-3)}\ \mathrm{d}t\ .$$

Decomponendo l'ultima frazione in fratti semplici, si ha:

$$\frac{1}{(3t+1)(t-3)} = \frac{A}{3t+1} + \frac{B}{t-3} = \frac{A(t-3)+B(3t+1)}{(3t+1)(t-3)} = \frac{(A+3B)t + (-3A+B)}{(3t+1)(t-3)}.$$

Uguagliando i numeratori della prima e dell'ultima frazione, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+3B &= 0 \\ -3A+B &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= -\frac{3}{10} \\ B &= \frac{1}{10} \end{cases} .$$

Dunque

$$\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x}\ \mathrm{d}x \ = -2\int \left(-\frac{3}{10}\frac{1}{3t+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{t-3}\right)\ \mathrm{d}t \ = \frac{1}{5}\log|3t+1| - \frac{1}{5}\log|t-3| + c =$$
$$= \frac{1}{5}\log\left|\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-3}\right| + c.$$

7. (a) Per la formula fondamentale del calcolo integrale, per risolvere l'integrale definito $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\ \mathrm{d}x$, si deve prima trovare una primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ e poi calcolare $F(1) - F(0)$.

Per calcolare $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4}\ \mathrm{d}x$, usiamo il metodo di decomposizione delle funzioni razionali in fratti semplici, ottenendo:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x+2)(x-2)}.$$

Uguagliando i coefficienti dei due polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 1 \\ 2A-2B &= -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A &= \frac{1}{4} \\ B &= \frac{3}{4} \end{cases} .$$

Dunque

$$\int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{\frac{3}{4}}{x+2}\right)\ \mathrm{d}x \ = \left[\frac{1}{4}\log|x-2| + \frac{3}{4}\log|x+2|\right]_0^1 = \frac{1}{4}\log 1 + \frac{3}{4}\log 3 - \frac{1}{4}\log 2 - \frac{3}{4}\log 2 = \frac{3}{4}\log 3 - \log 2.$$

(b) Per calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\ \mathrm{d}x$, calcoliamo prima l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\ \mathrm{d}x$.

Utilizziamo dapprima la sostituzione $2x+1 = u$ e dunque $\mathrm{d}x \ = \frac{1}{2}\ \mathrm{d}u$, e in seguito applichiamo la formula di integrazione per parti; otteniamo:

$$\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\ \mathrm{d}x \ = \frac{1}{2}\int \frac{\log u}{u^2}\ \mathrm{d}u \ = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\log u - \int \frac{-1}{u^2}\ \mathrm{d}u\ \right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\log u - \frac{1}{u}\right) + c.$$

Pertanto

$$\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\ \mathrm{d}x \ = -\frac{1}{2(2x+1)}\left[1+\log(2x+1)\right] + c.$$

Dunque l'integrale definito cercato vale:

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\ dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1+\log(2x+1)}{2x+1}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1+\log 5}{5} - 1\right) = \frac{4-\log 5}{10}.$$

(c) Per calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2}\ \mathrm{d}t$, calcoliamo prima l'integrale indefinito, usando la sostituzione: $\sqrt{t} = y$, e dunque $t = y^2$ da cui $\mathrm{d}t \ = 2y\ \mathrm{d}y$.

Allora: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t}-3}{2-3\sqrt{t}+t}\ \mathrm{d}t \ = \int \frac{y-3}{2-3y+y^2}\,2y\ \mathrm{d}y \ = 2\int \frac{y^2-3y}{y^2-3y+2}\ \mathrm{d}y \ = 2\int \left(1 - \frac{2}{y^2-3y+2}\right)\ dy =$

$$= 2\int\ \mathrm{d}y\ - 4\int \frac{1}{(y-1)(y-2)}\ \mathrm{d}y\ .$$

Usiamo il metodo di decomposizione delle funzioni razionali in fratti semplici:

$$\frac{1}{(y-1)(y-2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} = \frac{A(y-2)+B(y-1)}{(y-1)(y-2)} = \frac{(A+B)y-2A-B}{(y-1)(y-2)}$$

che porta a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ -2A-B &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= -1 \\ B &= 1 \end{cases}.$$

Dunque:

$$2\int \mathrm{d}y \; - 4\int \frac{1}{(y-1)(y-2)} \; \mathrm{d}y \; = 2y - 4\int \left(\frac{-1}{y-1} + \frac{1}{y-2}\right) \; \mathrm{d}y \; = 2y + 4\log|y-1| - 4\log|y-2| + c.$$

Applicando ora la sostituzione inversa, si ottiene:

$$\int \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2} \; \mathrm{d}t \; = 2\sqrt{t} + 4\log\left|\sqrt{t}-1\right| - 4\log\left|\sqrt{t}-2\right| + c = 2\sqrt{t} + 4\log\left|\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}-2}\right| + c.$$

Si può infine ricavare il valore dell'integrale definito

$$\int_9^{16} \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2} \; \mathrm{d}t \; = 2\sqrt{16} + 4\log\left|\frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}-2}\right| - 2\sqrt{9} - 4\log\left|\frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}-2}\right| = 2 + 4\log 3 - 8\log 2.$$

(d) Per risolvere l'integrale definito $\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x \; \mathrm{d}x$, si deve anzitutto spezzare l'intervallo di integrazione $[0, \sqrt{3}]$ nei due sottointervalli $[0, 1]$ e $[1, \sqrt{3}]$, in quanto la funzione $|x-1|$ assume in essi due espressioni diverse; si ha dunque

$$\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x \; \mathrm{d}x \; = \int_0^1 4(1-x) \arctan x \; \mathrm{d}x \; + \int_1^{\sqrt{3}} 4(x-1) \arctan x \; \mathrm{d}x \; .$$

Possiamo ora utilizzare la formula di integrazione per parti per calcolare l'integrale indefinito:

$$\int (x-1) \arctan x \; \mathrm{d}x \; = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \arctan x - \int \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \frac{1}{1+x^2} \; \mathrm{d}x \; = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-2x}{x^2+1} \; \mathrm{d}x \; .$$

Poiché il polinomio a denominatore nell'ultimo integrale non ha grado superiore a quello a numeratore, procediamo con la divisione del numeratore per il denominatore:

$$\int \frac{x^2-2x}{x^2+1} \; \mathrm{d}x \; = \int \left(1 - \frac{2x+1}{x^2+1}\right) \; \mathrm{d}x \; = \int \mathrm{d}x \; - \int \frac{2x}{x^2+1} \; \mathrm{d}x \; - \int \frac{1}{x^2+1} \; \mathrm{d}x \; = x - \log(x^2+1) - \arctan x + c.$$

Dunque:

$$\int (x-1) \arctan x \; \mathrm{d}x \; = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \log(1+x^2) - \arctan x\right) + c.$$

Calcolando ora l'integrale definito, si ricava:

$$\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x \; \mathrm{d}x \; = -4\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \log(1+x^2) - \arctan x\right)\right]_0^1 +$$

$$+4 \; \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \arctan x - \frac{1}{2}\left(x - \log(1+x^2) - \arctan x\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3} + 4(2-\sqrt{3})\,\frac{\pi}{3}.$$