

Benvenuti!

Lezione del 1 Ottobre 2013

Cap 1

Brauer - Pagan - Soler

Insieme

insieme

A, B, X

elementi a, b, x

$$a \in A$$

$$A = \{a, b, c\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Con i predicati

$$D \stackrel{\text{definizione}}{:=} \left\{ m \in \mathbb{N} : \overbrace{m \text{ è dispari}}^{p(m)} \right\} =$$

$$= \{ n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1 \}$$

$$a \in A \qquad a \qquad \{a\}$$

Simboli $\forall, \exists, \nexists, \exists!, \Rightarrow, \Leftrightarrow,$
 $\notin, \cap, \dots$

— —

A, B insiemi

$$A = B$$

contengono gli stessi elementi

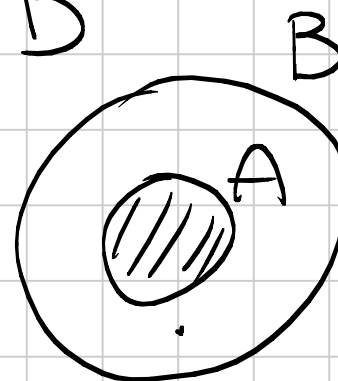
$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$\text{e } \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

$$A \subseteq B$$

A sottinsieme di B

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$



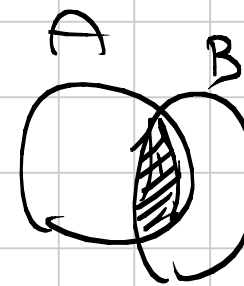
$$A \subsetneq B$$

A è strettamente
contenuto in B

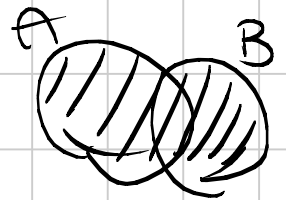
$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ e } \exists x \in B : x \notin A$$

Operazioni insiemistiche

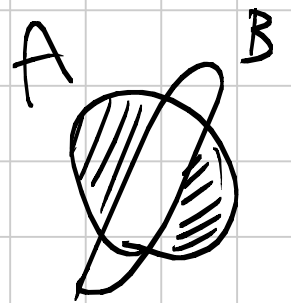
$$A \cap B := \{ x : x \in A \text{ e } x \in B \}$$



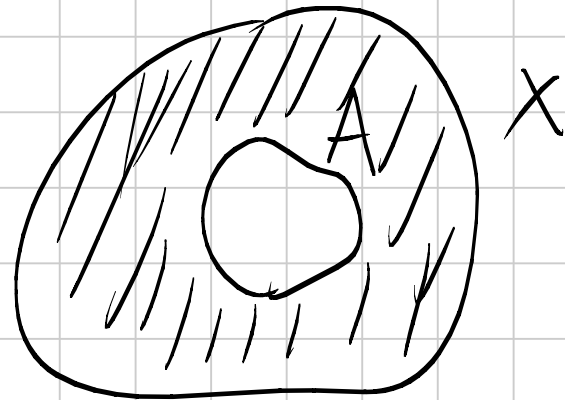
$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$



$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



$${}_X A^c = X \setminus A = A^c$$



$\emptyset$ insieme vuoto = insieme che ha zero elementi.

$$\emptyset \subseteq A$$

Insieme delle parti di X

X insieme

$$\mathcal{P}(X) := \{ \text{sottinsiemi di } X \}$$

es. $X = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(X) = \{ \emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \}$$

$$\{b, c\}$$

sono 2^3 elementi

In generale se X ha n elementi

$\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi.

Insiemi numerici

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

numeri naturali

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

numeri interi
(relativi)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

si possono anche scrivere in
forma decimale

numeri razionali
(frazioni)

$$p, d_1 d_2 \dots d_n \quad \text{snluff decimale finito}$$

$$p, d_1 d_2 d_1 d_2 \dots = p, \overline{d_1 d_2} \quad \text{infinito periodico}$$

$\mathbb{R}$ numeri reali ogni snluff decimale

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Prodotto cartesiano

A, B due insiemi

$$A \times B := \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

(a, b) coppia ordinata

$$(a, b) \in A \times B$$

$$(b, a) \notin A \times B$$

$\approx b \notin A$

$$(a, b) \neq (b, a)$$

$$A = \{0, 1\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}$$

$$A \times B \neq B \times A \quad \text{in general}$$

$$\text{if } A = B$$

$$A \times A = A^2$$

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$A \times B \times C$$

$$\mathbb{R}^3 := \{ (x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{R}^n := \{ (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \}$$

Proprietà delle operazioni su insiemi

$$A \cap B = B \cap A ; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{distributiva}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A^c)^c = A$$

Logica elementare : proposizioni, dimostrazioni
e negazioni di proposizioni

$$\forall x \in A \quad p(x) \Rightarrow q(x)$$

$p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi

$$\subseteq \forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{n \text{ dispari}}_{p(n)} \Rightarrow \underbrace{n^2 \text{ dispari}}_{q(n)}$$

Dim. $n = 2k + 1$ $n^2 = (2k + 1)^2 =$

$$= 4k^2 + 4k + 1 =$$
$$= \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{pari}} + 1 = \text{dispari}.$$

— . —

$\forall x \in A \quad p(x) \Rightarrow q(x)$
è equivalente

$\forall x \in A \quad \text{non } q(x) \Rightarrow \text{non } p(x)$

es. n dispari $\Rightarrow n^2$ dispari
 $p(n)$ $q(n)$

n^2 pari $\Rightarrow n$ pari

Controesempio si usano per dim. la
falsità di una implicazione

$$\forall x \in A \quad p(x) \Rightarrow q(x)$$

se trovo $\bar{x} \in A$ vale $p(\bar{x})$ ma non vale $q(\bar{x})$

ho dim. la falsità dell'implicazione.

es. $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{n \text{ primo}}_{p(n)} \Rightarrow \underbrace{n \text{ è dispari}}_{q(n)}$

$n=2$ verifica p ma non q .

$\Rightarrow$ FALSA!

Dimostrazioni per assurdo

$\underbrace{\forall x \in A \ p(x)}_{\text{ipotesi}} \Rightarrow \underbrace{q(x)}_{\text{tesi}}$

Supponiamo x assurdo che non valga $q(x)$

..... trovo una contraddizione con
l'ipotesi (con $p(x)$)

Teo. $\nexists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$ (Euclide)

Dim. supponiamo per assurdo $\exists r \in \mathbb{Q}$
A.c. $r^2 = 2$ $r = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$
 $m \neq 0$

Supponiamo che n e m siano privi fra loro.

$$r^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$$

$$\boxed{n^2 = 2 \underbrace{m^2}_{\text{pari}}}$$

$$\Rightarrow m^2 \text{ \u00e8 pari} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{fatto primo} \\ m \text{ \u00e8 pari} \end{array} \right\}$$

$$m = 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \downarrow \quad 4k^2 = 2m^2$$

$$m^2 = 2k^2 \quad m^2 \text{ \u00e8 pari} \Rightarrow m \text{ \u00e8 pari}$$

allora m e m sono entrambi pari,
 assurdo per cui m e m sono primi tra
 loro.
 $\Rightarrow \nexists$ nessun numero razionale

il cui quadrato $\bar{x} = 2$.

$$x^2 = 2 \quad x =: \sqrt{2} \quad \bar{x} \text{ irrazionale.}$$

negazioni delle proposizioni (p. 13)

$\forall x$ vale $p(x)$ negazione
 $\exists x : \text{non vale } p(x)$

$\forall x$ vale $p(x) \text{ e } q(x)$ negazione
 $\exists x : \text{non vale } p(x) \text{ o } q(x)$

non vale $q(x)$

Sommatorie

somme di
 n numeri

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

i = indice di sommatoria
è "mutuo"

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

es. $\sum_{i=1}^5 \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

$\sum_{k=3}^8 \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}$

es. $\sum_{k=0}^n q^k$

$q =$ fisso
rapporto delle
progressioni
geometriche

$\sum_{k=0}^n 3^k = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$