

Lezione del 15 ottobre

MOODLE $\rightarrow$ LEZIONI
ESERCIZI proposti

MIO STTO

MATH. UNIPD. IT / ~MANNUCCI

- upde d'esame
- programma svolto
- avvisi

Limiti e continuità (cap. 3)

Limiti di successioni

Successione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \rightarrow a_n$

si può usare $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

a_n

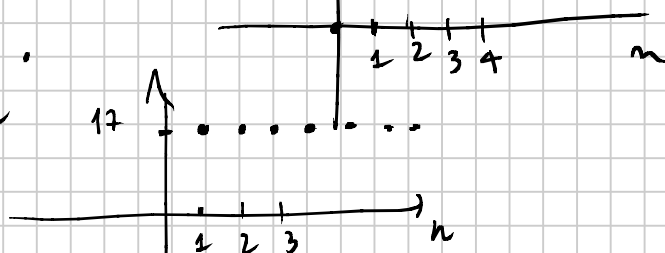
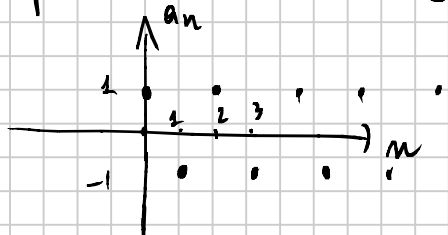
es. $a_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0, 1, 4, 9, \dots$

$a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

$a_n = 17 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ costante}$

$a_n = (-1)^n \quad 1, -1, 1, -1, \dots$

primo coordinate (n, a_n)

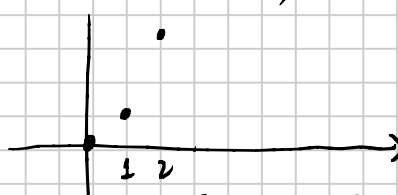


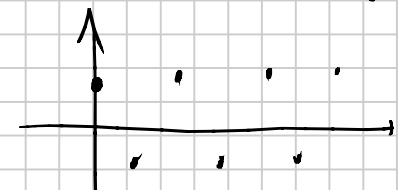
Def. $\{a_n\}$ è limitata inferiormente se
 $\exists m \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a_n \geq m, \forall n$

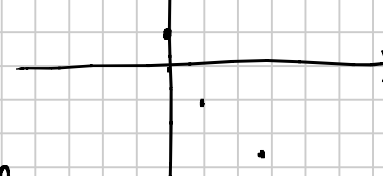
$\{a_n\}$ è limitata superiormente se

$\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M, \forall n$

$\{a_n\}$ è limitata se $\exists m, M \in \mathbb{R}$
t.c. $m \leq a_n \leq M, \forall n$

es. $a_n = n^2$  $\bar{x}$ limit. inf. ma non superior.
sufficientemente
piccolo
de limit. superiormente:
devo trovare M A.c. $n^2 \leq M \quad \forall n$
 $\Downarrow n \leq \sqrt{M}$

es. $a_n = (-1)^n$  $\bar{x}$ limitata
 $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

es. $a_n = (-2)^n$ 
non è limitata
né sup., né inf.

Def. Dico che $\{a_n\}$ possiede una certa proprietà
definitivamente se $\exists N \in \mathbb{N}$ A.c.

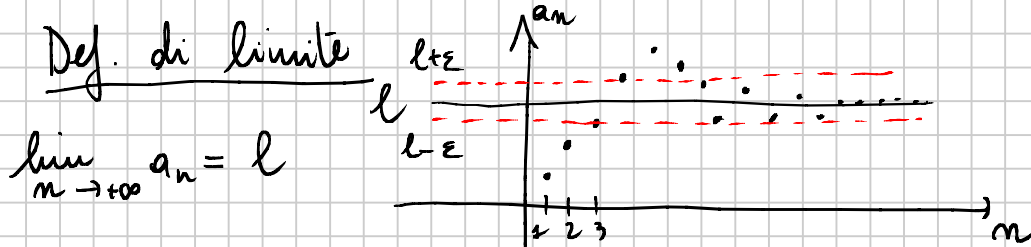
$\{a_n\}$ ha quella proprietà $\forall n \geq N$.

es. $a_n = n^2 - 6n$ è definitivamente
positiva
 $\Downarrow a_n = n(n-6) > 0$ se $n > 6$
 $a_0 = 0$
 $a_1 = -5$
 $a_2 = -8$
 $\vdots$

es. $a_n = \frac{1}{n}$ è definitivamente $< \frac{1}{100}$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ da un certo n in poi

$n > 100$



a_n sta dentro il tubo rosso se

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

Def. Una successione $\{a_n\}$ si dice convergente a l se $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ t.c. $|a_n - l| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$.

(se $\forall \varepsilon > 0$ risulta $|a_n - l| < \varepsilon$ definitivamente)

Allora si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$

e l è il limite della successione

$$(a_n \rightarrow l, n \rightarrow +\infty) \quad \lim_n a_n = l$$

oss. Se cambio ε mi cambio N
 N (la soglia) dipende da ε .

es. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ verifichiamo il limite

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.c. } \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\forall n > N$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

N il primo intero + grande di $1/\varepsilon$

per esempio $\varepsilon = \frac{1}{100}$

$$N \quad n > \boxed{100}$$

$$\varepsilon = 1 \quad n > 1$$

es. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{1/n} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N$

t.c. $|3^{1/n} - 1| < \varepsilon, \forall n > N$

$$1 - \varepsilon < 3^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

$$3^{1/n} > 1 - \varepsilon$$

$$3^{1/n} > 1 > 1 - \varepsilon \quad \text{vale } \forall n$$

$$3^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \log_3(1 + \varepsilon)$$

$n > \frac{1}{\log_3(1 + \varepsilon)} N$ è la soglia

Prop. Se $\{a_n\}$ è convergente, il limite è unico.

Dim. Supp. che ci siano due limiti l_1 e l_2
 $l_1 \neq l_2$

$$\lim_n a_n = l_1$$

$$\lim_n a_n = l_2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : |a_n - l_1| < \varepsilon, \forall n > N_1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : |a_n - l_2| < \varepsilon, \forall n > N_2$$

$$N = \max\{N_1, N_2\} \quad \forall n > N \quad \text{vale sia} \\ |a_n - l_1| < \varepsilon \quad \text{ma} \quad |a_n - l_2| < \varepsilon$$

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \stackrel{\text{disug. triangolare}}{\leq} |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| \leq \varepsilon + \varepsilon \\ \forall n > N$$

$$|l_1 - l_2| \leq 2\varepsilon$$

se $l_1 \neq l_2$

$$|l_1 - l_2| = a$$

$$a \leq 2\varepsilon \quad \text{e prendo } \varepsilon \leq \frac{a}{2}!$$

non è vero!

$$\Rightarrow l_1 = l_2.$$

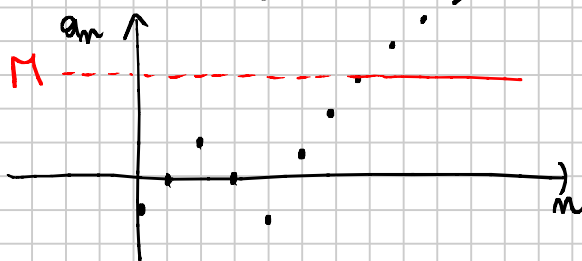
Successioni divergenti

Def. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ oppure $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

$$\forall M > 0 \exists N \text{ t.c.}$$

$$a_n > M \quad \forall n > N$$

($a_n > M$ definitivamente)



N dipende da M

significa

$$\forall M > 0 \exists N \text{ t.c.}$$

$$a_n < -M, \quad \forall n > N$$

($a_n < -M$ definitivamente)



N dipende da M

$$\lim_n a_n = +\infty$$

$$= -\infty$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

sono simboli

per convenzione $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$$(-\infty, 1] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 1\}$$

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} = \mathbb{R}^*$$

$$x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

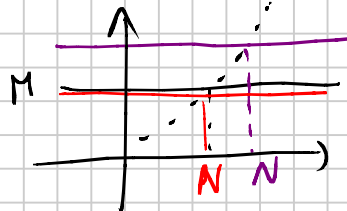
es. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

$$\forall M > 0 \exists N \text{ t.c. } a_n > M, \quad \forall n > N$$

$$\forall M > 0 \exists N \text{ t.c. } n^2 > M, \quad \forall n > N$$

$$n^2 > M$$

$$n > \sqrt{M}$$



$$\text{es. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

verifica con la
definizione.

$$\forall M > 0 \quad \exists N \text{ t.c. } a_n < -M, \forall n > N$$

$$\forall M > 0 \quad \exists N \text{ t.c. } \log\left(\frac{1}{n}\right) < -M, \forall n > N$$

$$\frac{1}{n} < e^{-M} \quad n > \underbrace{e^M}_N$$

$$\text{utile } \lim_{n \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) = 3$$

non riuscite
a trovare
che $\forall n > N$
vale

$$\lim_n a_n = l$$

($\rightarrow$)

successione convergente
($\exists$ limite finito)

$$\lim_n a_n = +\infty$$

($\rightarrow$)

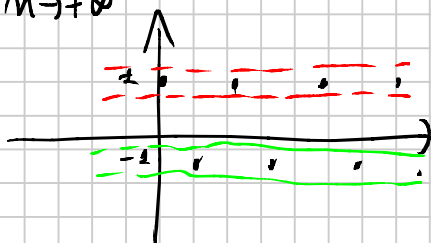
successione divergente
($\exists$ limite infinito).

$$\lim_n a_n = -\infty$$

Def. Una successione che non è né convergente, né divergente si dice indeterminata (o inegalore)
In tal caso si dice che il limite non esiste

$$\lim_n a_n \nexists$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \text{ è indeterminata, cioè } \nexists \text{ limite}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n \text{ non esiste}$$



Es. per caso Verificare con la definizione di limite

$$\lim_n \frac{n+1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_n 3^n + 5 = +\infty$$

$$\lim_n 1 - n^2 = -\infty$$

Esercizi

Funzioni inverse delle funzioni iperboliche

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$x \in \mathbb{R}$
seno iperbolico

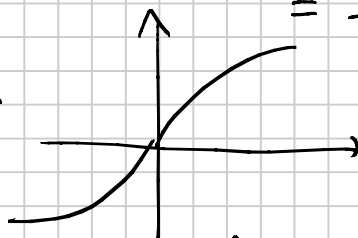
dispari

come è strutt.
monotona in $\mathbb{R}$
è invertibile in $\mathbb{R}$



$$\sinh x = y \quad (\Rightarrow) \quad x =: \operatorname{settsinh} y = f^{-1}(y)$$

$\operatorname{settsinh} y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
"sette seno iperbolico"



Ma scrivo esplicitamente $\operatorname{settsinh} y$

$$y = \sinh x \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2y = e^x - e^{-x} \quad e^x - e^{-x} - 2y = 0$$

$$e^{-x} (e^{2x} - 1 - 2ye^x) = 0$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$\underline{e^x = z}$$

$$z^2 - 2yz - 1 = 0$$

$$z = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

scarto
 $y - \sqrt{y^2 + 1}$
 jndi < 0

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\text{sett} \text{ sech } y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

def. $\forall y \in \mathbb{R}$
 jndi $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$
 $\forall y \in \mathbb{R}$

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$\forall x \in \mathbb{R}$ non è monotone in $\mathbb{R}$ ma in $[0, +\infty)$ si!

$$\cosh x : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty) \text{ è invertibile}$$

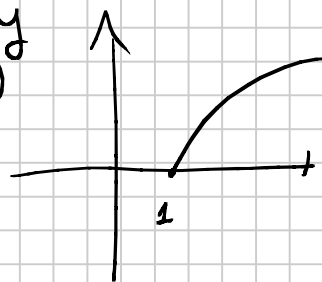
$$\text{sett} \cosh y : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

settore coseno iperbolico

$$y = \cosh x \Leftrightarrow x = \text{sett} \cosh y$$

$$x \in [0, +\infty)$$

$$y \in [1, +\infty)$$



$$\text{sett} \cosh y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$



$$\cosh x : (-\infty, 0] \rightarrow [1, +\infty)$$

$$f^{-1}: [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$$

$$\text{es. } \sqrt{x^2 - 1} > \frac{x}{2}$$

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1 \quad x \leq -1$$

1) $\frac{x}{2} < 0 \quad \text{e} \quad x < 0$
 sempre verificata $\forall x \leq -1$ la diseq. è valida.

2) $\frac{x}{2} \geq 0 \quad (x \geq 0)$ elevo al quadrato

$$x^2 - 1 > \frac{x^2}{4}$$

$$\frac{3}{4}x^2 > 1$$

$$x^2 > \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x > \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} < 1$$

$$2 < \sqrt{3}$$

$$4 < 3$$

$$x > \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x \leq -1$$

$$\text{es. } \sqrt{4x^2 - 9x + 2} < 2x + 1$$

$$4x^2 - 9x + 2 \geq 0 \Rightarrow \dots \text{condi} \quad x \geq 2 \quad \text{e} \quad x \leq \frac{1}{4}$$

1) $2x + 1 < 0$

$$\forall x < -\frac{1}{2}$$

non verificata

2) $2x + 1 \geq 0 \quad x \geq -\frac{1}{2}$

$$4x^2 - 9x + 2 < 4x^2 + 1 + 4x$$

$$13x > 1 \quad x > \frac{1}{13}$$

$$x \in \left(\frac{1}{13}, \frac{1}{4}\right] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{es. } \sqrt{|x^2 - 2x + 1|} \geq 2x$$

$$1) x \leq 0 \quad \text{vha}$$

$$2) x > 0 \quad |x^2 - 2x + 1| \geq 4x^2$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geq 4x^2 \\ x^2 - 2x + 1 \leq -4x^2 \end{cases}$$

$$R. \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$$

$$\text{es. } \sqrt[3]{7+8x^3} < 2x+1 \quad \text{no problems!}$$

$$7+8x^3 < (2x+1)^3$$

$$\text{es. } \sin x + \cos x \geq 1 \quad [0, \pi]$$

$$1 - \cos x \leq \sin x$$

$$1 - \cos x \geq 0$$

$$1) \sin x < 0$$

non verificata
 $x \in (\pi, 2\pi)$



$$2) \sin x \geq 0 \quad \text{elevo al quadrato}$$

$$1 + \cos^2 x - 2\cos x \leq \sin^2 x$$

$$1 + \cos^2 x - 2\cos x \leq 1 - \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x \leq 0$$

$$2\cos x (\underbrace{\cos x - 1}_{\leq 0}) \leq 0 \Rightarrow \cos x \geq 0 \text{ e } x \in (0, \pi)$$



$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ si verificano le diseq.}$$

$$x \in \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$