17 Ottobre

Successioni monotòne

Def. $\{a_n\}$ è monotona crescente
se $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n$

è strett. crescente
se $a_n < a_{n+1}$, $\forall n$

è monotone decrescente
se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$

è strett. decrescente
se $a_n > a_{n+1}$, $\forall n$

es. $a_n = n^2$ $\quad 0, 1, 4, 9, \dots$

è strett. crescente $\quad a_n < a_{n+1} \quad \forall n$

$$? \quad n^2 < (n+1)^2$$

$$\cancel{n^2} < \cancel{n^2} + 1 + 2n$$

Vero $\forall n \in \mathbb{N}$

es. $a_n = \dfrac{1}{n}$ è strett. decrescente

$$a_n > a_{n+1}$$

$$? \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \qquad n+1 > n \quad \text{sì!}$$

es. $a_n = 17$ è monotòne crescente
e " decrescente

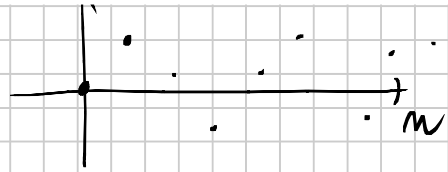
$a_{n+1} = a_n \quad \forall n$

es. $a_n = (-1)^n$ $\quad a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n$ $\quad$ No!
$\quad a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$

non è monotone

es. $a_n = \operatorname{sen} n$

non è monotona



es. $a_n = \frac{n+1}{n}$ è monotona ?

? $\boxed{a_n \le a_{n+1}}$ oppure $a_n \geq a_{n+1}$

? $\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{a_n} \le \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{a_{n+1}}$ $\quad (n+1)^2 \overset{?}{\le} n(n+2)$

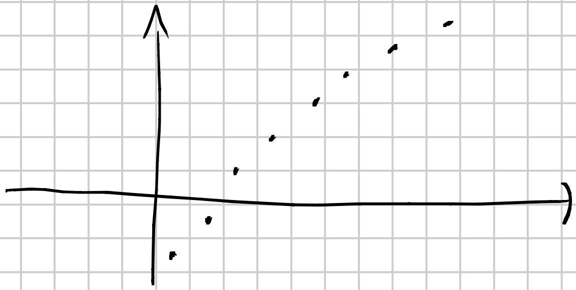
$\cancel{n^2}+1+\cancel{2n} \overset{?}{\le} \cancel{n^2}+\cancel{2n}$

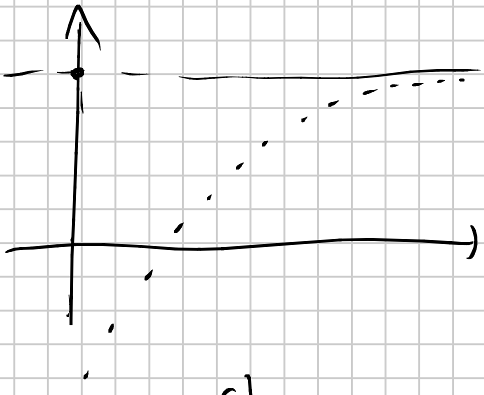
$1 \le 0$ no!

Vale $a_n \geq a_{n+1} \Rightarrow a_n$ è monotona decrescente

si può fare vedere che $a_n > a_{n+1} \Rightarrow$ strett. decrescente.

Le successioni monotone non sono mai irregolari, cioè $\exists$ sempre limite di una successione monotona





$$\text{limite } a_n = \sup\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

<u>Teorema</u> $\{a_n\}$ successione monotona crescente e limitata superiormente. Allora $\{a_n\}$ è convergente e $\lim_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(analog. se è monotona decrescente e limitata inferiormente $\lim_n a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

<u>Dim</u> devo dimostrare che

15. $\lim_n a_n = \Lambda := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\Lambda \in \mathbb{R}$ esiste perché l'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato superiormente

devo dim. $\lim_n a_n = \Lambda$?

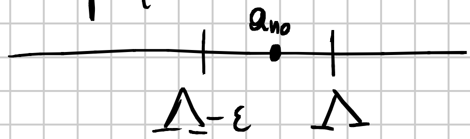
cioè che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda + \varepsilon, \ \forall n > N$

per def. di sup. $a_n \leq \Lambda < \Lambda + \varepsilon \quad \forall n$ e $\forall \varepsilon$ → sempre verificata $\forall n$.

(Λ è un maggiorante per a_n)

ora devo verificare che $a_n > \Lambda - \varepsilon \quad , \forall n > N$

Per definizione Λ è il $\sup\{a_n\}$ cioè è il + piccolo dei maggioranti



$\Downarrow$

$\forall \varepsilon \ \exists \ a_{n_0}$ t.c. $a_{n_0} > \Lambda - \varepsilon$

Poiché $\{a_n\}$ è crescente $\forall n > n_0$

$a_n \geq a_{n_0} > \Lambda - \varepsilon \quad \Rightarrow \Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda + \varepsilon \quad \forall n > n_0$. #

— —

Estensione

Corollario Se $\{a_n\}$ è monotona crescente ed è illimitata superiormente allora $\exists \lim_n a_n = +\infty$

In generale Se $\{a_n\}$ è monotona crescente $\exists$ sempre il $\lim_n a_n$ e questo è finito se è limitata sup., è infinito se non è limitata superiormente.

Analoga se $\{a_n\}$ è monotona decrescente

$\exists$ sempre $\lim_n a_n$ e questo è finito se è limitato inferiormente, è $-\infty$ se non è limitato inferiormente.

es. $a_n = n^2$ strett. crescente

$\sup \{n^2, \ n \in \mathbb{N}\} = +\infty = \lim_n n^2$

$a_n = \frac{1}{n}$ strett. decrescente

$\inf \{ \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}, \ n \neq 0\} = 0 = \lim_n \frac{1}{n}$

es. successione geometrica

$a_n = q^n, \quad q \in \mathbb{R}$

1) $q > 1$ $\quad q^n$ • monotona crescente (si può dim. che)
• non è limitata superiormente

$\Rightarrow \lim_n q^n = +\infty, \quad q > 1$

2) $0 < q < 1$ $\quad q^n$ • monotona decrescente
• è limitata inferiormente

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad \inf \{q^n, \ 0 < q < 1\} = 0$

$\Rightarrow \lim_n q^n = 0, \quad 0 < q < 1$

3) $q = 1$ $\quad q^n = 1$ $\quad \lim_n q^n = 1$, $q = 1$

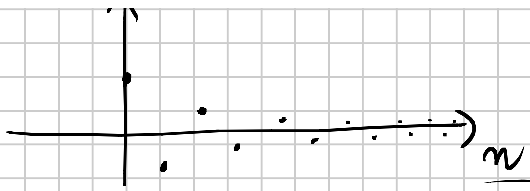
4) $q \leq -1$ $\quad q^n$ $\underline{\underline{\text{non}}}$ è monotona

$((-1)^n, (-2)^n)$ e si può dim. che

$\lim_n q^n \nexists$ se $q < 0$

5) $-1 < q \leq 0$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ non è monotona

$\lim q^n = 0$



$$\boxed{\lim_n q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}}$$

Il numero e (numero di Nepero)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 1^\infty$$

è una forma d'indecisione

$$(a_n)^{b_n} = e^{\log\left((a_n)^{b_n}\right)} = e^{b_n \log a_n} \qquad y = e^{\log y}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{\log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} = e^{n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n \to +\infty}{} e^{0 \cdot \infty} \; ?$$

$1^{\pm\infty}$ è una forma d'indecisione

0^0 "

$(+\infty)^0$ "

Teorema la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

è convergente.

Dim non si fa ma si basa su

1) a_n è monotona crescente

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \overset{?}{\geq} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

2) a_n è limitata superiormente

$$2 \leq a_n < 4$$

$\Rightarrow$ per il teo. delle successioni monotone $\exists$ finito il limite

---

Per definizione

$$e \doteq \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ numero di Nepero

$e = 2,7182\ldots$ si può dim. che e è un numero irrazionale

$$2 \leq a_n < 4$$
$$2 < e < 4$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

In generale si può dimostrare

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$$ perché $n^2 \to +\infty$

IN GENERALE

$$a_n \to \pm\infty$$

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

$a_n = -n \to -\infty$

$$\lim_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

$$\lim_n \left(1+\frac{3}{n^2+5}\right)^{\frac{n^2+5}{3}} = e \qquad a_n = \frac{n^2+5}{3} \to +\infty$$

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$

es.

$$a_n = \frac{n}{\alpha} \to +\infty$$

$$\lim_n \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}} = e$$

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$$

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n} = \left(\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right)^{\alpha} \to e^{\alpha}$$

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}} \to e$$

$$\boxed{\lim_n \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n} = e^{\alpha}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

es. $\lim_n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$ $\qquad (\alpha = -1)$

es. $\lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n}$ $\qquad \frac{n+1}{n} = \frac{\cancel{n}(1+1/n)}{\cancel{n}} \to 1$

1^{∞} forma d'indecisione

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3} \to e^{3}$$

es. $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+7}{2n+1}}$ $\qquad \frac{n^2+7}{2n+1} = \frac{n^{\cancel{2}}\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}{\cancel{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)} \to +\infty$

1^{∞}

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+7}{2n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+7}{2n+1}\cdot\frac{n}{n}} =$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{n^2+7}{(2n+1)\cdot n}}$$

esponente $\frac{n^2+7}{(2n+1)\cdot n} = \frac{n^2+7}{2n^2+n} =$

$$= \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2+\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1}{2}$$

quindi $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{n^2+7}{2n^2+n}} \longrightarrow e^{1/2}$