

Lezione del 2 Ottobre

Sommatore e coefficienti binomiali

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Es. q^k progressione geometrica
di ragione q , $q \neq 1$
 $k=0, \dots, n$ $1, q, q^2, q^3, \dots, q^n$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

n. $q = 3$

$$\sum_{k=0}^8 3^k = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^8 =$$

$$= \frac{1 - 3^9}{1 - 3}$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = ? \quad \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad q \neq 1$$

Dim. $(1-q) \sum_{k=0}^n q^k = 1 - q^{n+1}$

$$(1-q)(1+q+q^2+\dots+q^n) = 1 - q^{n+1}$$

$$1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

$1 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$

Coefficienti binomiali e binomio di Newton

$$(a+b)^n$$

$$h=0$$

$$1$$

$$h=1$$

$$a+b$$

$$n=2$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$h=3$$

Fattoriale di $n \in \mathbb{N}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n$$

$$0! = 1$$

per definizione

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$8! = 40320$$

$$10! \Rightarrow 3 \text{ milioni}$$

Numero di permutazioni di n oggetti distinti $= n!$

3 oggetti a, b, c

$$n=3 \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$3 \cdot 2 \cdot 1$$

$a b c$

$b a c$

$c a b$

$a c b$

$b c a$

$c b a$

Coefficient binomiali

$n, k \in \mathbb{N}$

$k \leq n$

$$c_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$c_{2,1} = \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2$$

$$\binom{0}{0} = 1 \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Formule del binomio di Newton

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \dots (a+b)$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n c_{n,k} a^k b^{n-k}$$

coefficienti binomiali $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

es. $n=2$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^2 c_{2,k} a^k b^{2-k}$$

$$= \underbrace{c_{2,0}}_1 b^2 + \underbrace{c_{2,1}}_2 ab + \underbrace{c_{2,2}}_1 a^2$$

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} = 1$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2$$

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!0!} = 1$$

I coefficienti $\binom{n}{k} = C_{n,k}$
 Triangolo di Tartaglia

n° calcolano con il

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

[illegible]

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 =$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{3} \quad 3 \quad 1$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{4} \quad \boxed{6} \quad 4 \quad 1$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Campi ordinati e in particolare $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$,

$\mathbb{R}$

sono

campi

ordinati

due operazioni (somma e prodotto)
che verificano determinate
proprietà:

commutativa
associativa
elemento neutro e inverso
distributiva

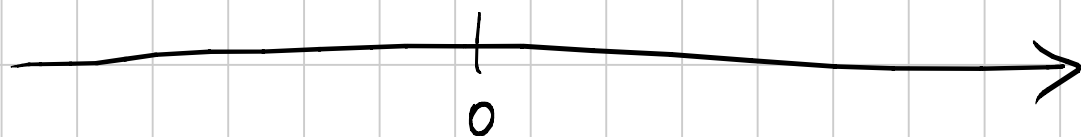
è definita una relazione d'ordine
 $\leq$ che verifica 3 proprietà

riflessiva
antisimmetrica
transitiva

$$a \leq a$$

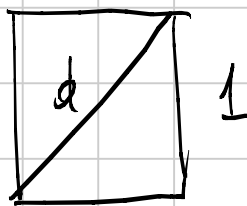
$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono totalmente ordinati

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \mathbb{R} \quad a \leq b \text{ o } b \leq a$$



Passaggio da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

I razionali non sono sufficienti a misurare tutte le lunghezze



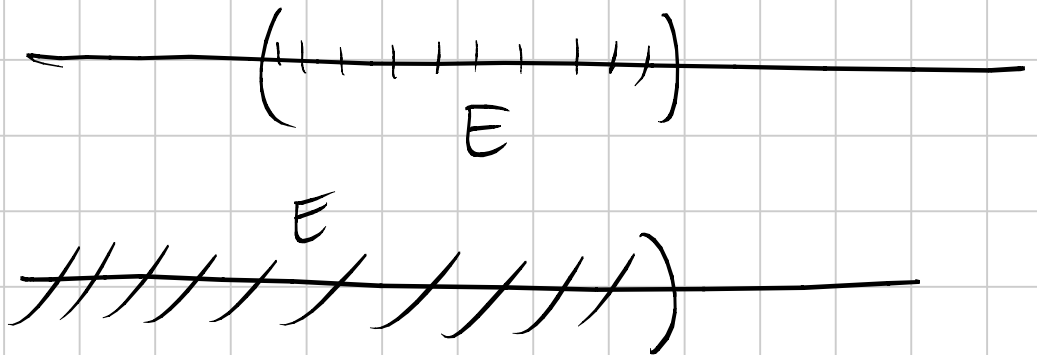
$$d^2 = 2$$

$\Rightarrow d \notin \mathbb{Q}$
come dim. ieri.

Costruisco $\mathbb{R}$ definendo l'estremo superiore

X insieme totalmente ordinato ($X = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$)

Def. $E \subseteq X$ è limitato superiormente se
 $\exists M$ (maggiore) t.c. $x \leq M, \forall x \in E$.

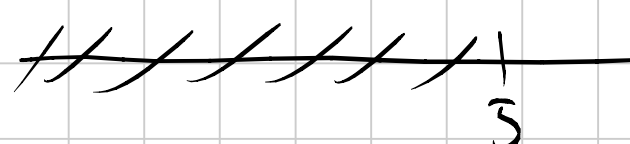


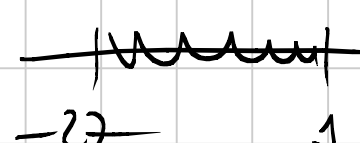
$\bar{\epsilon}$ limite inferiormente se

$\exists m$ (minore) A.c. $x \geq m, \forall x \in E$

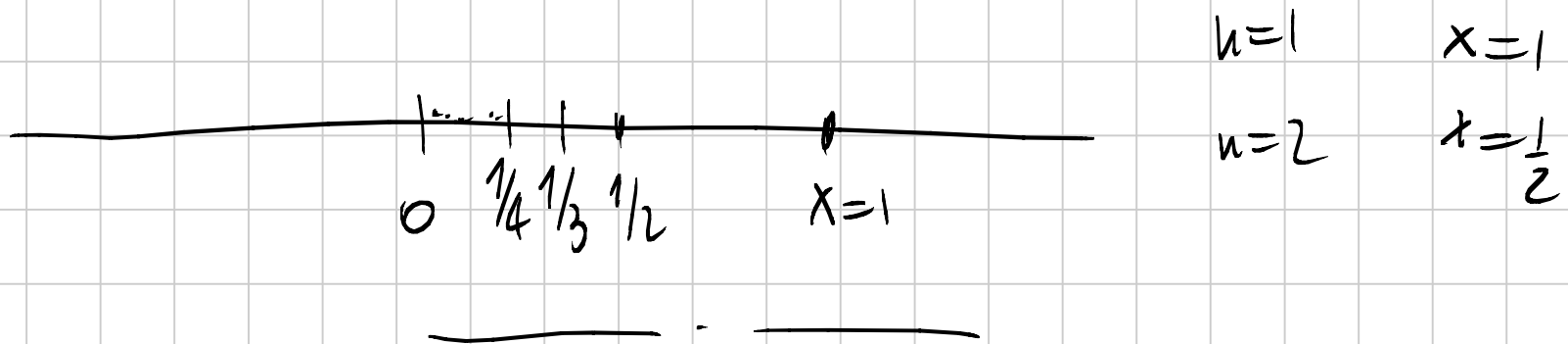
E è limitato se $\bar{\epsilon}$ limite superiore e inferiormente

Cioè $\exists m, M$ t.c. $m \leq x \leq M, \forall x \in E$

Es. $E = \{ x \in \mathbb{Q} : x < 5 \}$ 

$E_1 = \{ x \in \mathbb{Q} : -27 < x < 1 \}$ 

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$



$$E \subseteq X$$

Def $\bar{x}$ $\bar{e}$ MASSIMO in E se

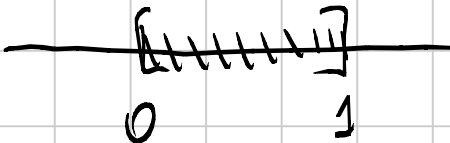
i) $\bar{x} \in E$

ii) $x \leq \bar{x}, \forall x \in E$

$\bar{x}$ $\bar{x}$ MINIMO per E se

i) $\bar{x} \in E$

ii) $x \geq \bar{x}, \forall x \in E$

es. $E = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ 

$$= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$$

E ha massimo ($x=1$) e minimo ($x=0$)

$$\min E = 0$$

$$\max E = 1$$

es. $E_1 = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$

A horizontal number line with a solid dot at 1 and an open parenthesis at 0. The segment between 0 and 1 is filled with wavy lines, representing the interval (0, 1].

E_1 è limitato inferiormente
ma $\nexists$ minimo

es. $E_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x < -5\}$ $\nexists$ max ma
è limit.
superiormente
ma non
inferiormente.

A horizontal number line with several tick marks. At the point -5, there is an open parenthesis and the number -5 is written below the line. The region to the left of -5 is marked with wavy lines, representing the set of rational numbers less than -5.

Oss. se $\exists$ massimo di $E \Rightarrow E$ è limit. sup.
se E è limitato sup. $\nexists \max E$

Prop. se esiste il massimo di E , questo è
unico.

Dim. per assurdo suppongo $\exists M_1$ e M_2
massimi di E , $M_1 \neq M_2$

M_1 è massimo di E

M_2 è massimo di E

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & M_1 \in E \\ \text{ii)} \quad & M_1 \geq x, \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

$$\Downarrow \quad \downarrow$$

$$M_1 \geq M_2$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & M_2 \in E \\ \text{ii)} \quad & M_2 \geq x, \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

$$\Downarrow \quad \downarrow$$

$$M_2 \geq M_1$$

$$M_1 = M_2$$

Def. di estremo superiore e inferiore di un insieme E
 (sup) (inf)

Def. $E \subseteq X$, $k \in X$ (non necess. di E)

si dice maggiorante di E se $k \geq x$, $\forall x \in E$

Analogamente $k \in X$ è minorante di E

se $k \leq x$, $\forall x \in E$

oss. se E è limitato

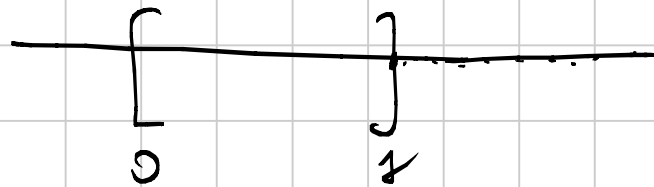


Def. $\sup E$ (estremo superiore di E) è il
minimo dei maggioranti di E . (se esiste)

$\inf E$ (estremo inferiore di E) è il
massimo dei minoranti di E (se esiste).

oss. se E ha un massimo questo coincide
con il $\sup$.

Es. $E = [0, 1]$



$$\max E = 1 = \sup E$$

$$\min E = 0 = \inf E$$

$$E_1 = (0, 1]$$

A horizontal number line with an open parenthesis '(' at 0 and a closed bracket ']' at 1, representing the interval (0, 1].

$$\max E = 1 = \sup E$$

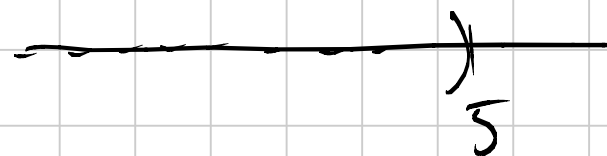
$$\nexists \min E$$

Minoranti : $x \leq 0$

il massimo dei
minoranti è $x = 0$

$$\inf E = 0$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\}$$

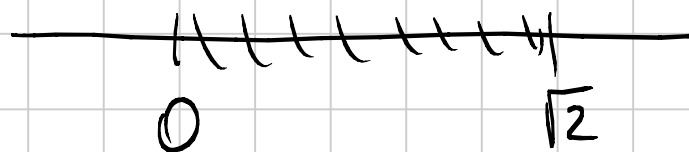


$$5 = \sup E$$

$$E_3 = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\}$$

$$\min E_3 = 0$$

$$\sup E_3 \not\in \mathbb{Q} \quad \text{no } \exists \text{ in } \mathbb{R}$$



$$X = \mathbb{Q}$$

$$X = \mathbb{R}$$

$$E_4 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^2 < 2\}$$

Proprietà dell'estremo superiore (Assioma di completezza o di continuità)

X ha proprietà dell'estremo superiore se
 $\forall E \subseteq X$ non vuoto e limitato superiormente
questo possiede $\sup$ in X .

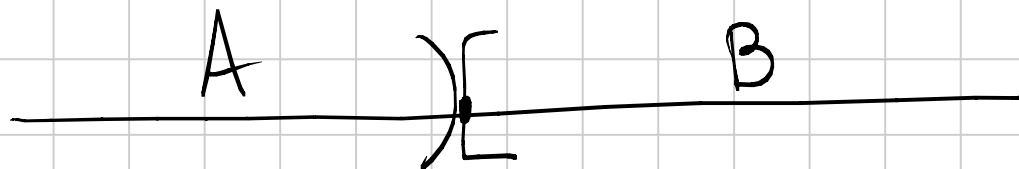
attenzione non è X che ha sempre estremo
 $\sup$ ma ogni $E \subseteq X$ limitato superiormente.

Def. $\mathbb{R}$ è un campo ordinato che
ha la proprietà dell'estremo superiore

Si può dim. che la proprietà del sup è
equivalente a dire che per ogni separazione $\{A, B\}$
di $\mathbb{R}$

(cioè $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$, $a < b$
 $\forall a \in A$
 $\forall b \in B$)
 $\exists ! s$ (elemento separatore)

t.c. $a \leq s \leq b$, $\forall a \in A, \forall b \in B$



$$s = \sup A = \inf B$$

Es. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$$

$\exists ! s$
elemento
separatore

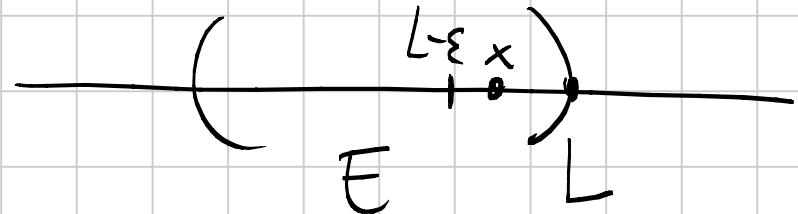
$$s =: \sqrt{2}$$

— . —

Caratterizziamo il $\sup E$ e l' $\inf E$

$E \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente

$L = \sup E$ è il minimo dei maggioranti

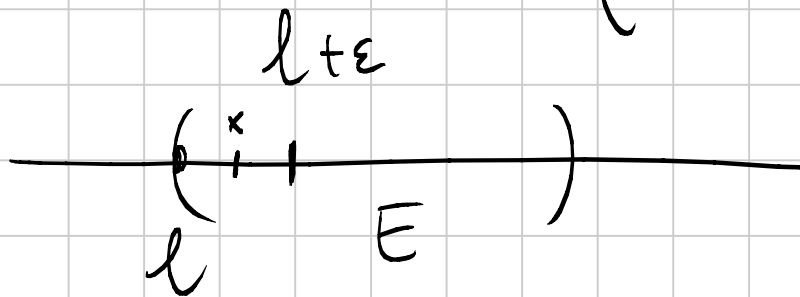


$$L = \sup E \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } x \leq L, & \forall x \in E \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \text{ t.c.} \\ & x > L - \varepsilon \end{cases}$$

Analog.

(ⁱⁱ⁾ dice che
 $(L - \varepsilon \text{ non } \bar{\varepsilon} \text{ maggiorante di } E)$

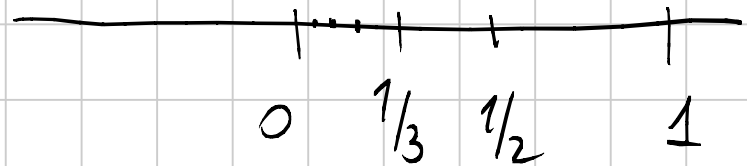
$$l = \inf E \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } x \geq l, \forall x \in E \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \exists x \in E \text{ t.c.} \\ \quad x < l + \varepsilon \end{cases}$$



ii) dice che
 $l + \varepsilon \text{ non } \bar{\varepsilon} \text{ minorante di } E$

ejercicio $E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$

E es limitado



donde $1 = \max E$

i) $x \leq 1, \forall x \in E$
 $\frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$
sí!

ii) $1 \in E$ según $n=1$ $x=1 \in E$

dim. che $0 = \inf E$

$$0 \notin E$$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

$$i) ? x \geq 0, \forall x \in E$$

$$? \frac{1}{n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

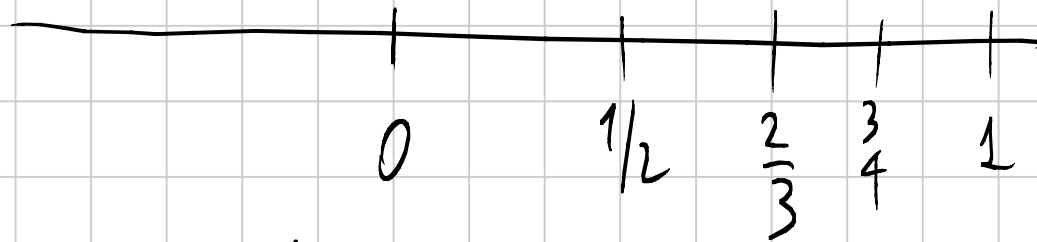
$$ii) ? \forall \varepsilon > 0 \exists x \in E \text{ t.c. } \underbrace{x < \varepsilon}$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$x = \frac{1}{n}$$

se si prende $n > \frac{1}{\varepsilon}$ e il corrispondente
x ha ii) $\bar{x}$ verificata.

esercizio $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$



$$1 = \sup A$$

$$0 = \min A \longrightarrow \text{Per caso}$$

$$1 = \sup A$$

$$i) \quad ? \quad x \leq 1 \quad \forall x \in A$$

$$? \quad \frac{n}{n+1} \leq 1$$

$$\cancel{n} \leq \cancel{n} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A :$$

$$x > \underline{1 - \varepsilon}$$

$$\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$$

$$n > (1 - \varepsilon)(n+1)$$

$$n > n + 1 - \varepsilon n - \varepsilon$$

$$\varepsilon n > 1 - \varepsilon$$

$$n > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$