

Lezione del 22 Ottobre

Def. di $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$
 $= +\infty$
 $= -\infty$

e succ. indeterminata

se $\exists$ limite $\Rightarrow$ è unico

a_n convergente $\Rightarrow$ è limite
~~*~~

$a_n \rightarrow a$ $a, b \in \mathbb{R}$ $a_n + b_n \rightarrow a + b$
 $b_n \rightarrow b$ $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$

operazioni sui limiti

forme di indecisione $\infty - \infty = ?$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

permanenza segno 1) $a > 0 \Rightarrow a_n > 0$ definita.

2) $a_n \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$

Teo. del confronto

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

$\downarrow$
 l

$\downarrow$
 l

$\downarrow$
 l

$$|b_n| \leq c_n$$

$\downarrow$
 0

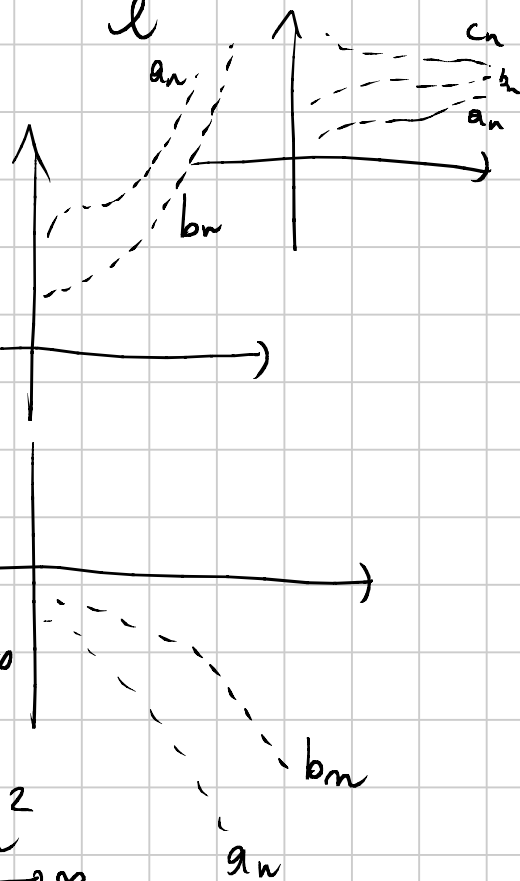
oss. $a_n \geq b_n$

se $b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$

e con anche

se $a_n \leq b_n$
 e $b_n \rightarrow -\infty \Rightarrow a_n \rightarrow -\infty$

es. $n^2 (1 + \underbrace{\sin^2}_{\geq 1}) \geq \underbrace{n^2}_{\rightarrow \infty}$



quindi $n^2(1 + \sin^2 n) \rightarrow +\infty$

• successioni monotone $\Rightarrow \exists$ segue limite

finito
infinito

• $e := \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

• $\lim_n q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \text{non esiste} & q \leq -1 \end{cases}$

Confronti e stime asintotiche

$a_n \rightarrow 0$ si chiama infinitesimo

$a_n \rightarrow \pm\infty$ si chiama infinito

$\frac{1}{n}$ infinitesimo $n^2 + 3n + 5$ infinito

1) $a_n \rightarrow \pm\infty$ infinito $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$
 $b_n \rightarrow \pm\infty$

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{b_n\} \text{ è infinito di ordine superiore di } \{a_n\} \\ l \text{ finito } \neq 0 & \text{infiniti dello stesso ordine} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ è infinito di ordine superiore rispetto a } \{b_n\} \\ \text{non esiste} & \text{le succ. non sono confrontabili} \end{cases}$

es. 1 $\lim_n \frac{n}{n^5 + 3} = \lim_n \frac{n}{n^5 \left(1 + \frac{3}{n^5}\right)} = 0$

es. 2 $\lim_n \frac{3n^2}{3n^2 + \frac{1}{n} + \sin n} =$
 $= \lim_n \frac{3n^2}{3n^2 \left(1 + \frac{1}{3n^3} + \frac{\sin n}{3n^2}\right)} = 1$

es. 3 $\lim_n \frac{n^3}{n^2 + 1} = +\infty$

es. 4 $\lim_n \frac{n(1 + \sin^2 n)}{n} \frac{a_n}{b_n}$ ~~$\frac{a_n}{b_n}$~~

2) $a_n \rightarrow 0$ $b_n \rightarrow 0$ entrambe infinitesimi $\frac{0}{0}$

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{a_n\} \text{ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a } \{b_n\} \\ l \text{ finito } \neq 0 & \text{infinitesimi dello stesso ordine} \\ \pm \infty & \{b_n\} \text{ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a } \{a_n\} \\ \text{non sono confrontabili} & \end{cases}$

Caso particolare a_n, b_n infiniti infinitesimi

se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ si dice $a_n \sim b_n$

Si dice che a_n e b_n sono ASINTOTICHE

Proprietà delle successioni asintotiche

1) $a_n \sim b_n$ le due successioni hanno lo stesso comportamento (conv., div., indent.)

2) $a_n \sim a'_n$ $b_n \sim b'_n \Rightarrow a_n \cdot b_n \sim a'_n \cdot b'_n$

ma non vale $a_n + b_n \sim a'_n + b'_n$

Gerarchia degli infiniti (confronti tra successioni "note").

$\log n \rightarrow +\infty$ $a > 1$

$n^\alpha \rightarrow +\infty$ $\alpha > 0$

$$a^n \longrightarrow +\infty \quad a > 1$$

$$n! \longrightarrow +\infty$$

$$n^n \longrightarrow +\infty$$

Si dimostra che

$$\lim_n \frac{\log_a n}{n^d} = 0 \quad \forall d > 0 \text{ e } a > 1$$

n^d è infinito di ordine superiore rispetto a $\log_a n$

$$\text{es. } \lim_n \frac{\log_2(n^2)}{\sqrt{n}} = \lim_n \frac{2 \left(\frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} \right)}{1} = 0$$

Inoltre si dim. che

$$\lim_n \frac{n^d}{a^n} = 0 \quad \forall d > 0 \text{ e } a > 1$$

a^n è infinito di ordine superiore rispetto a n^d (con $a > 1$) ($d > 0$)

$$\text{es. } \lim_n \frac{n^{1000}}{2^n} = 0 \quad \lim_n \frac{2^n}{n^{1000}} = +\infty$$

Si dim. (e lo premo fra un po')

$$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$$

$a > 1$
ma vale anche in generale & $a > 0$
(e $a \in (0, 1)$ $a^n \rightarrow 0$
non è una forma di indeterminate).

$n!$ è infinito di ordine superiore rispetto a n^n

Si dim (lo facciamo per un j)

$$\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

n^n è infinito di ordine superiore rispetto a $n!$

$\log n$ n^d a^n $n!$ n^n

↑ successioni scritte in ordine crescente di infinito ↑

es.

$$\lim_n \frac{\log_3 n + n^2 + e^n}{n^{100} + n!} =$$

$$= \lim_n \frac{e^n \left(\frac{\log_3 n}{e^n} + \frac{n^2}{e^n} + 1 \right)}{n! \left(\frac{n^{100}}{n!} + 1 \right)} = 0$$

Annotations:
 - $\frac{\log_3 n}{e^n} \rightarrow 0$
 - $\frac{n^2}{e^n} \rightarrow 0$
 - $\frac{n^{100}}{n!} \rightarrow 0$
 - $\frac{n!}{n!} = 1$

es.

$$\lim_n \frac{n! + e^{5n}}{n^{500n} - e^{6n}} =$$

$$= \lim_n \frac{n! \left(1 + \frac{e^{5n}}{n!} \right)}{e^{6n} \left(\frac{n^{500n}}{e^{6n}} - 1 \right)} = -\infty$$

Annotations:
 - $\frac{e^{5n}}{n!} \rightarrow 0$
 - $\frac{n^{500n}}{e^{6n}} \rightarrow +\infty$
 - $\frac{n!}{(e^6)^n} \rightarrow +\infty$
 - $\frac{n^{500n}}{e^{6n}} - 1 \rightarrow -1$

Criterio del rapporto

Teo. a_n successione positiva ($a_n > 0, \forall n$)
se esiste $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ e

$l < 1$ allora $a_n \rightarrow 0$, se

$l > 1$ (anche $+\infty$) allora $a_n \rightarrow +\infty$

Dim. Caso $l < 1$ H.p. $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$

T.s. $\lim_n a_n = 0$

H.p.

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon, \forall n \geq n_0$

$a_{n+1} < (l + \varepsilon) a_n \quad \forall n \geq n_0$

$\begin{array}{c} < 1 \\ \text{---} \end{array}$

$\begin{array}{c} l + \varepsilon \\ | \quad | \quad | \\ l \quad 1 \end{array}$

scelgo ε tale che $l + \varepsilon < 1$

$a_{n_0+1} < (l + \varepsilon) \cdot a_{n_0}$

con $n = n_0$

successivamente con $n = n_0 + 1$

$a_{n_0+2} < (l + \varepsilon) a_{n_0+1} < (l + \varepsilon)(l + \varepsilon) a_{n_0} =$
 $= (l + \varepsilon)^2 a_{n_0}$

$a_{n_0+3} < (l + \varepsilon) a_{n_0+2} <$
 $n = n_0 + 3$

$< (l + \varepsilon)^3 a_{n_0}$

... iterando il procedimento

$0 < a_{n_0+k} < (l + \varepsilon)^k a_{n_0}$

$n = n_0 + k$

$n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow k \rightarrow +\infty$

q^k con $0 < q < 1$

$$0 < a_{n+k} < (l+\epsilon)^k a_n$$

for $0 < l+\epsilon < 1$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad k \rightarrow +\infty$

per il teorema del confronto

$$a_n, a_n > 0 \quad \lim_n a_n = ?$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} l > 1 & a_n \rightarrow +\infty \\ l < 1 & a_n \rightarrow 0 \\ l = 1 & \text{non si può dire niente.} \end{cases}$$

Esempi

$$\lim_n \frac{b^n}{n!} = ? \quad a_n = \frac{b^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

ho dim. con il criterio del rapporto che

$$\lim_n \frac{b^n}{n!} = 0$$

es. $\lim_n \frac{(1000)^n}{n!} = 0$

es. $\lim_n \frac{n!}{n^n} = ? \quad a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n! (n+1)}{n! (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l < 1$$

Quindi dal criterio del rapporto $a_n \rightarrow 0$

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad \lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$$

Il criterio del rapporto non funziona sempre:

$$\lim_n \frac{\log n}{n}$$

provo ad applicare
il criterio
del rapporto.

$$a_n = \frac{\log n}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n}{\log n} = \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot \left(\frac{\log(n+1)}{\log n} \right)$$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log \left(n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)}{\log n} =$$

$$= \frac{\log n + \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\log n} = 1 + \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\log n}$$

→ 1

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$$

$l = 1$

$$a_n = \frac{\log n}{n} \rightarrow ?$$

Per cose non funziona nemmeno qui

$$\lim_n \left(\frac{n}{3^n} \right) = a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$$

Esercizi su dominio di funzioni e disuguaglianze

$$f(x) = \log \left(1 - (x+1)^{x^2-1} \right)$$

$$\cdot \quad x+1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -1$$

$$\cdot \quad (x+1)^{x^2-1} < 1$$

$$y = e^{\log y}$$

$$(x+1)^{x^2-1} = e^{\log((x+1)^{x^2-1})} = e^{(x^2-1) \log(x+1)}$$

?

$$< 1$$

$$< e$$

$$\begin{cases} (x^2-1) \log(x+1) < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-1 > 0 \\ \log(x+1) < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} x^2-1 < 0 \\ \log(x+1) > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| > 1 \\ (x+1) < 1 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases} \text{ w!}$$

$$\begin{cases} |x| < 1 \\ x+1 > 1 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{0 < x < 1}$$

$$x > -1$$

es. $f(x) = \log(\cosh^2 x - 4 \cosh x + 5)$

dominio $\cosh^2 x - 4 \cosh x + 5 > 0$

$$y = \cosh x \quad y^2 - 4y + 5 > 0 \quad \forall y$$

$$\Delta = 4 - 5 < 0$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log(\cosh^2 x - 4 \cosh x + 5) - 1$$

signo $f(x) > 0 \quad \log(\quad) > 0$

$\cosh x = y \quad \log(y^2 - 4y + 5) > 0$

$$y^2 - 4y + 5 > 1$$

$$y^2 - 4y + 4 > 0$$

$$(y - 2)^2 \geq 0$$

$$f(x) = 0 \quad y = 2$$

$$\cosh x = 2$$

$$x = \pm \operatorname{arccosh} 2$$

