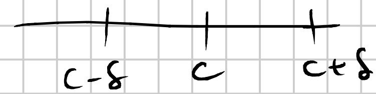
Lezione del 24 Ottobre

Limiti di funzioni

$c \in \mathbb{R}$

$U_c = (c-\delta,\ c+\delta)$



$U_{+\infty} = (a,\ +\infty)$

$U_{-\infty} = (-\infty,\ b)$

$x \in U_c \iff |x-c| < \delta$

$x \in U_{+\infty} \iff x > a$

$x \in U_{-\infty} \iff x < b$

Def. $c, l \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$\lim_{x \to c} f(x) = l \iff \forall\, U_l \ \exists\, V_c$ t.c.

$f(x) \in U_l,\ \forall x \in V_c,\ x \neq c.$

1) $c, l \in \mathbb{R}$

2) $c \in \mathbb{R},\ l = +\infty \quad \lim_{x \to c} f(x) = +\infty$

Caso 3) $c = +\infty,\ l \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

si dice che f ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists K \text{ t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon,\ \forall x > K}$$

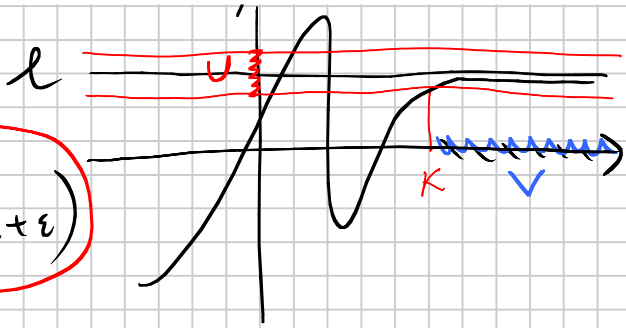
$U_l = \{l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon\}$

$V_{+\infty} = (K, +\infty)$

U

se $x > K$

$\Rightarrow f(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$



Caso 4

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$c = +\infty$

$V_c = (H, +\infty)$

$\ell = -\infty$

$U_{-\infty} = (-\infty, K)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall K, \ \exists H > 0 \text{ t.c. } f(x) < K, \ \forall x > H.$$

es. per casa fare altri casi.

esercizio
$$\lim_{x\to-\infty} 2^{1/x} = 1$$

Verifichiamolo con la definizione di limite

$\ell = 1$

$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$c = -\infty$

$(-\infty, K)$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K$ t.c.

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall x < K$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K : \left|2^{\frac{1}{x}} - 1\right| < \varepsilon \quad \forall x < K$$

$x \to -\infty$ quindi $x < 0$

$$1 - \varepsilon < 2^{1/x} < 1 + \varepsilon$$

se $x < 0$ $\quad 2^{1/x} < 1 < 1 + \varepsilon$

è verificata $\forall x < 0$

$\forall \varepsilon$

$$2^{1/x} > 1-\varepsilon \qquad x < \ldots ?$$

se $\varepsilon \geq 1$ sempre verificata $\forall x$

se $\varepsilon < 1$ $\qquad \log_2(1-\varepsilon)$

$$\frac{1}{x} > \log_2(1-\varepsilon) \qquad x<0 \text{ e } \log_2(1-\varepsilon)<0$$

$$\Downarrow$$

$$x < \underbrace{\frac{1}{\log_2(1-\varepsilon)}}_{K}$$

$$\frac{1}{\log_2(1-\varepsilon)} \qquad 0$$

se prendo $x < K \Rightarrow \left|2^{1/x} - 1\right| < \varepsilon$

. es. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ scriverle con gli intorni

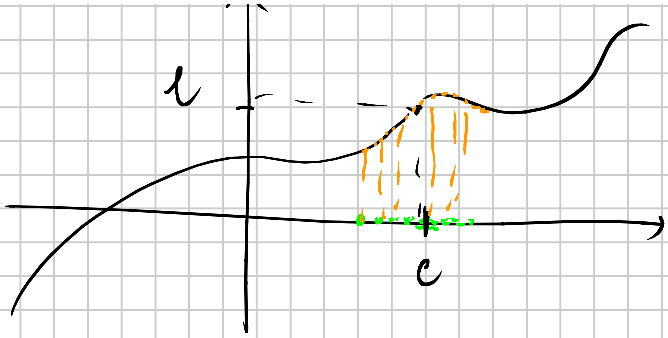
$\lim_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ con le definizione

Definizione di limite di funzione con le successioni

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$, $c, \ell \in \mathbb{R}^*$

prendo una qualsiasi successione x_n t.c.
$x_n \longrightarrow c$, $n \to +\infty$ (e x_n è diverso da c)
e considero $f(x_n)$ che è una successione

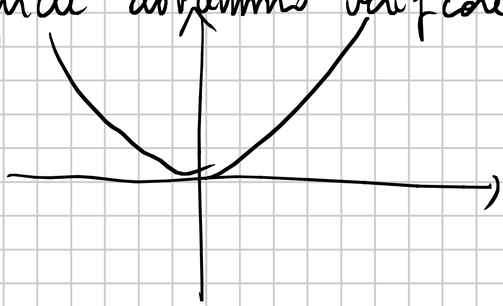
$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = \ell \iff \forall \{x_n\} \text{ t.c. } x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c \text{ e } x_n \neq c \quad \lim_{n} f(x_n) = \ell}$$



oss

Questa def. non serve a verificare il limite di una funzione, come abbiamo fatto prima con gli intorni. perché dovremmo verificare $\forall x_n \to c$

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$



ma serve per

1) ricondursi ai limiti di successioni e ottenere tutti i teoremi sui limiti di funzioni attraverso quelli già ottenuti per i limiti di successioni.

2) Con tale definizione si dimostra facilmente che una funzione non ha limite.

Es. $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \nexists$

Supponiamo che $\exists$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = l \iff \lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(x_n) = l$$

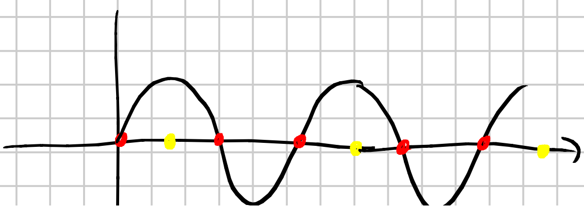
$$\forall x_n \to +\infty$$

trovo due successioni x_n e y_n t.c.

$x_n, y_n \to +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(x_n) = l_1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(y_n) = l_2$$



$x_n = 2n\pi \to +\infty$ $\qquad \operatorname{sen}(x_n) = \operatorname{sen}(2n\pi) = 0 \quad \forall n$

$\to 0$

$y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty$ $\qquad \operatorname{sen}(y_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) =$

$= 1 \to 1 \quad \forall n$

Quindi ho trovato due successioni x_n e y_n entrambe che $\to +\infty$

ma t.c. $\operatorname{sen}(x_n) \to 0$
$\operatorname{sen}(y_n) \to 1$ non allo stesso valore!

$\Rightarrow \lim \operatorname{sen} x = \nexists$

In generale per dimostrare che

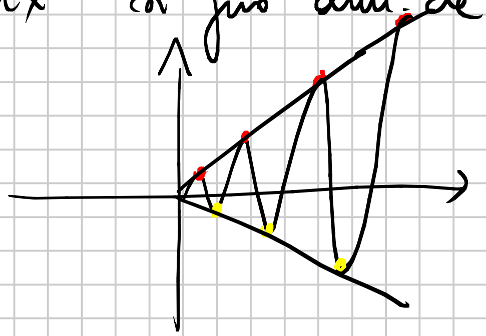
$\lim_{x \to c} f(x) \nexists$ basta trovare due successione x_n e $y_n \to c$ ma

$f(x_n) \to l_1$

$f(y_n) \to l_2$

Nello stesso modo di $\operatorname{sen} x$ si può dimostrare che

$\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} x \nexists$



Teoremi sui limiti di funzioni

Si ottengono tutti attraverso i teoremi sui limiti di successione e la definizione di limite attraverso il limite di successione

Teo. (unicità del limite)

Se esiste $\lim_{x \to c} f(x)$, tale limite è unico.

Dim. suff. per assurdo che

$\lim_{x \to c} f(x) = l_1 \iff$ $\forall x_n \to c$ $f(x_n) \to l_1$

$\lim_{x \to c} f(x) = l_2 \iff$ $\underbrace{f(x_n)}_{b_n} \to l_2$

b_n è una successione convergente con due limiti diversi

per il teorema di unicità del limite per le successioni, non può essere vero $\Rightarrow l_1 = l_2$.

Teorema di permanenza del segno

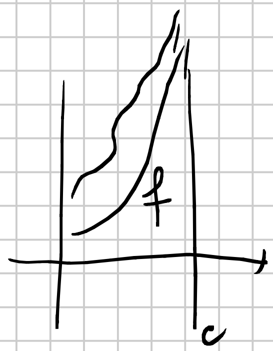
1) $\lim_{x \to c} f(x) = l$ e $l > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$

2) Se $f(x) \geq 0$ definitivamente $x \to c$ e $\lim_{x \to c} f(x) = l$ $\Rightarrow l \geq 0$

Teorema del confronto

- Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = l$ $\Rightarrow \lim_{x \to c} h(x) = l$

- Se $h(x) \geq f(x)$ e $f(x) \xrightarrow[x \to c]{} +\infty$ $\Rightarrow h(x) \xrightarrow[x \to c]{} +\infty$



- Se $h(x) \leq f(x)$ e $f(x) \xrightarrow[x \to c]{} -\infty$ $\Rightarrow h(x) \xrightarrow[x \to c]{} -\infty$

- Corollario $\begin{cases} |h(x)| \leq g(x) \\ g(x) \to 0 \quad x \to c \end{cases} \Rightarrow h(x) \xrightarrow[x \to c]{} 0$

$$|h(x)| \leq g(x) \iff -g(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$-g(x) \to 0, \quad h(x) \to 0, \quad g(x) \to 0$$

se $g(x) \to l$ non si può dire nulla su $h(x)$

- $f(x) \cdot g(x) \to 0$ se $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to c]{} 0 \\ g(x) \text{ limitata} \end{cases}$

es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x = 0$

$$\lim_{x \to 0} |x|^5 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

$-\operatorname{sen} x \geq -1$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{x} - 3}_{} \geq$$

$$\geq \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 3 - 1\right) = +\infty$$

$x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{x} - 4 \to +\infty$

$\left(h \geq f \quad f \to +\infty \right) \Rightarrow h \to +\infty$

Algebra dei limiti

$f \to l_1 \quad x \to c \qquad \lim_{x \to c} f(x) = l_1$

$g \to l_2 \quad x \to c \qquad c \in \mathbb{R}^*$

$f \pm g \to l_1 \pm l_2 \quad x \to c \qquad l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

$f \cdot g \to l_1 \cdot l_2$

$\frac{f}{g} \to \frac{l_1}{l_2}$ se l_2 e $g(x) \neq 0$ in un intorno di $x = c$

Vale l'algebra dei limiti anche nei casi $\pm\infty$

scritti per le successioni $f \to +\infty$
$g \to +\infty$

$f+g \to +\infty$, $f \cdot g \to +\infty$ ... e tutti gli altri

rimangono fuori le forme di indecisione

$\infty - \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ ...