8 Ottobre 2013

Radici n-esime e potenze

$$x^n = y \iff \sqrt[n]{y} :=: y^{1/n} = x$$

$$y > 0$$

Teo. $\forall y > 0 \ \underbrace{\exists!\, x > 0}_{x =: \sqrt[n]{y}} : \quad x^n = y$

n è dispari e $y < 0$ $\quad \sqrt[n]{y} := -\sqrt[n]{-y}$

- potenze a esponente razionale

$y^r \quad , \quad r = \frac{m}{n} \qquad y^r := (y^m)^{1/n}$

$y > 0$

ma per $y < 0$ e n dispari
si può estendere come sopra

- potenze a esponente reale $\quad b \in \mathbb{R}$

$$y^b \,, \quad y > 0 \qquad b = b_0, b_1 b_2 \dots$$

$$\sup \left\{ y^{b_0, b_1}, \; y^{b_0, b_1 b_2}, \; y^{b_0, b_1 b_2 b_3}, \dots \right\} =: y^b$$

procedimento di approssimazione

— · —

Logaritmi

<u>Teorema</u> Sia $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$.

$\exists!\ x \in \mathbb{R}$ t.c. $a^x = y$

per def. $x =: \log_a y$

$$x =: \log_a y \iff a^x = y \qquad \begin{array}{l} a > 0 \\ a \neq 1 \\ y > 0 \end{array}$$

$$a^x = a^{\log_a y} = y$$

proprietà delle potenze e dei logaritmi
sul libro (p. 27).

NO numeri complessi

FUNZIONI (Cap 2)

t tempo $f(t)$

Definizione A, B insiemi. f è una funzione (e si scrive $f: A \to B$) se f è una legge che ad ogni elemento di A associa uno e uno solo elemento di B.

("f è definita da A a B")

$$x \in A \qquad f : x \longrightarrow f(x) \in B$$

x = variabile indipendente

$f : A \to B$

A = dominio di f

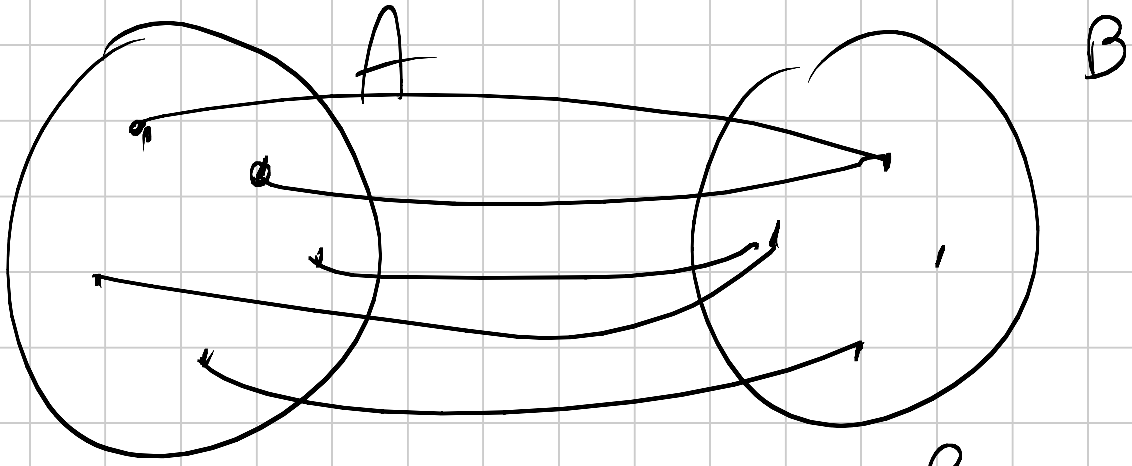
B = codominio di f

es. $f(x) = x^4$

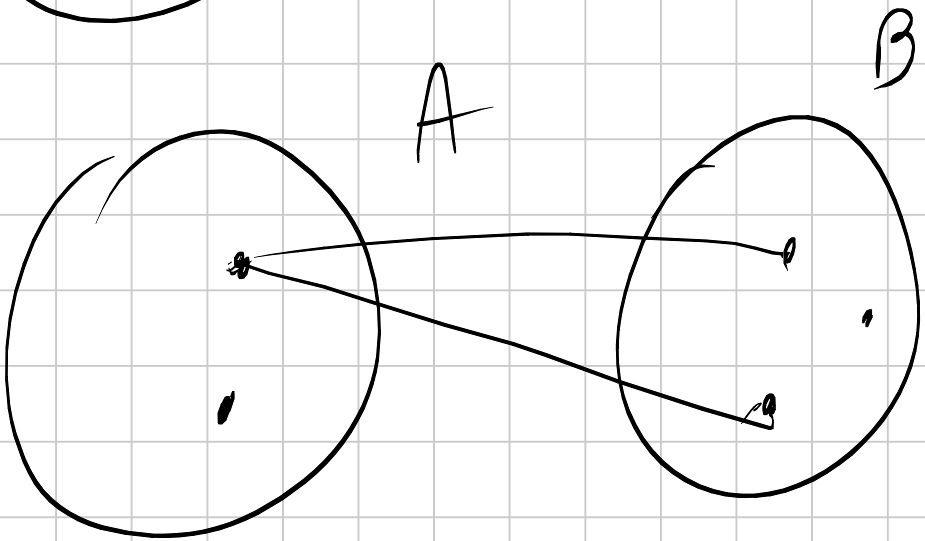
$$f : \underset{A}{\mathbb{R}} \to \underset{B}{\mathbb{R}}$$

$x \in A \xrightarrow[f]{} y \in B$, $y = f(x) \to$ i valori che assume f

es. 1



es.

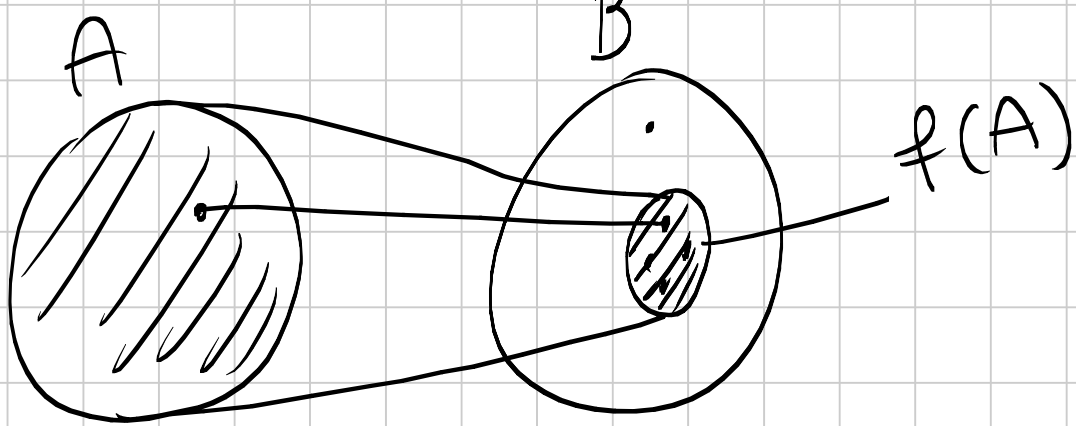


non è una funzione

Immagine di A attraverso f $\quad f: A \to B$

$$f(A) = \mathrm{Im} f = \{ y \in B \text{ t.c. } \exists x \in A : y = f(x) \}$$

$$f(A) \subseteq B$$



es. $f(x) = x^4 \qquad f: \underset{A}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}}} \to \underset{B}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}}}$

$$\mathrm{Im} f = f(\mathbb{R}) = [0, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R},\ x \geq 0 \}$$

$$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im} f = [0, +\infty)$$

$$A = \mathbb{R} \quad , \quad B = \mathbb{R}$$

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow y = f(x) \in \mathbb{R}$$

funzioni di variabile reale (x) a valori reali

2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) = z \in \mathbb{R}$$

es. $f(x, y) = x + y$

funzioni di variabile reale a valori vettoriali

3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow (f_1(x), f_2(x))$$

es. $f(x) = (\operatorname{sen} x, e^x)$

D'ora in poi

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

o in generale

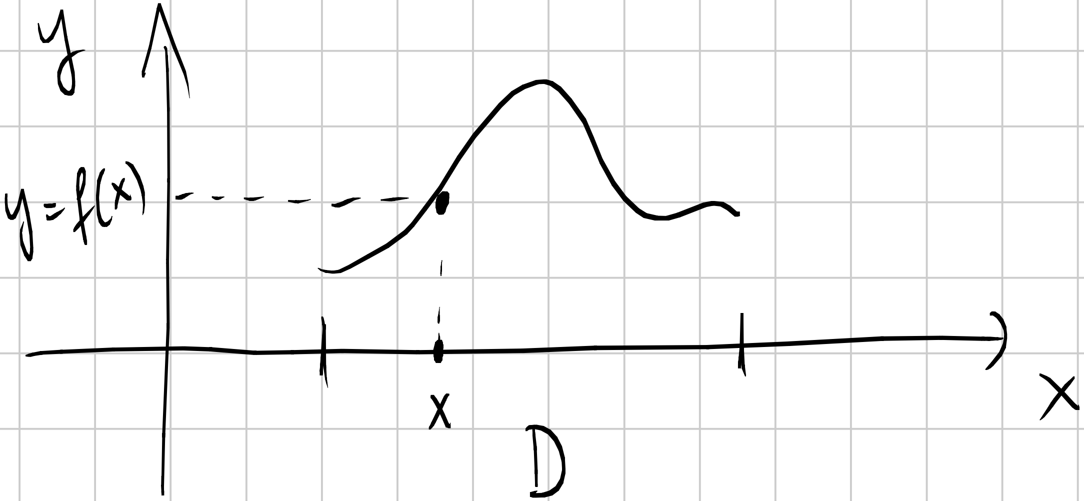
$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

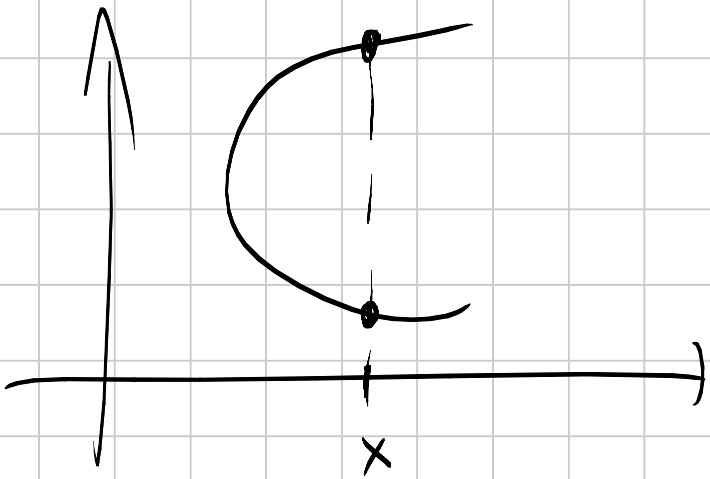
D dominio

$f(D) =$ immagine

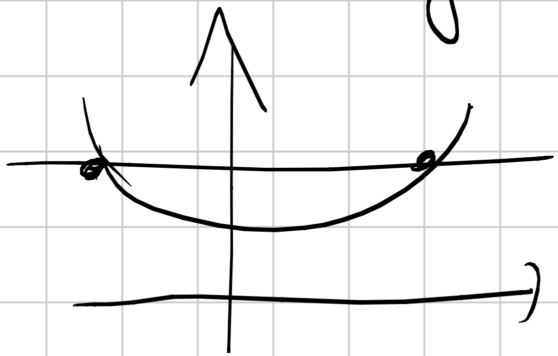
<u>grafico di f</u>

$$\text{graf}\, f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = f(x), \ x \in D \}$$





non è il grafico di nessuna funzione



questo sì!

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ D = dominio

intendo il "dominio naturale"

cioè gli x per i quali ha senso scrivere $f(x)$.

es. $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $D = \{ x \geq 0 \}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $D = \{ x : x \neq 0 \}$

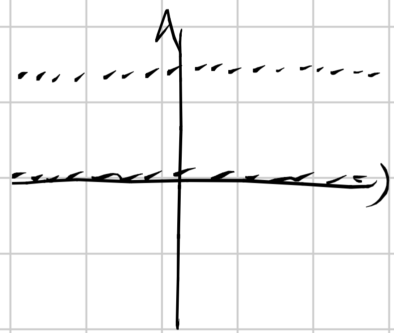
$f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$ $\quad$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$D = \{ (x,y) : y \neq x \}$$

oss. le funzioni si possono rappresentare anche con più formule

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = |x|$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

↓ dominio è $\mathbb{R}$

$$\operatorname{Im} f = \{0, 1\}$$

es.
$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow f(n) =: f_n$$

$$f_1, f_2, f_3, f_4, \dots \quad f_n$$

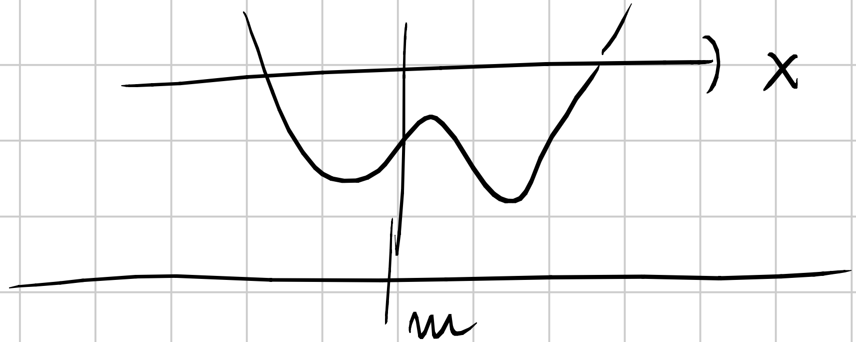
successioni di numeri

Funzioni limitate

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

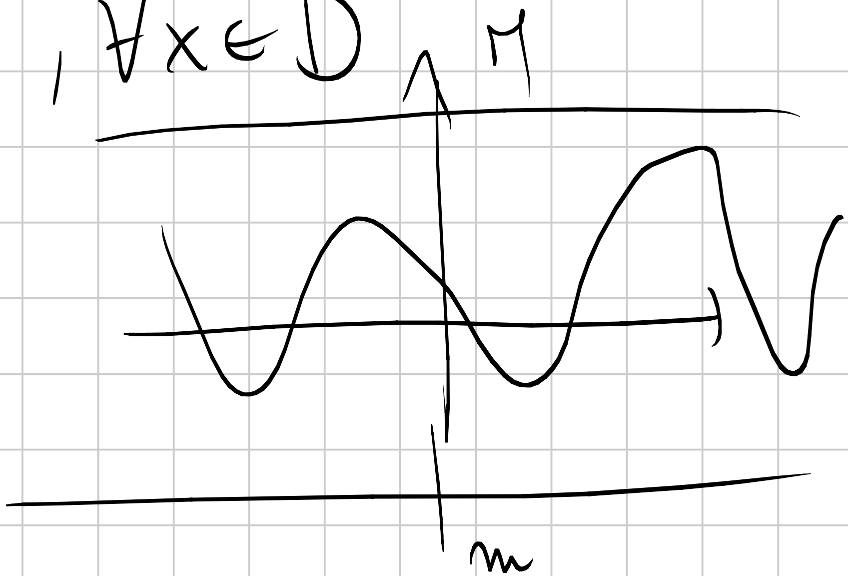
- f è **limitata superiormente** se $\exists\, M$ t.c. $f(x) \le M \,,\ \forall x \in D$

- f è **limitata inferiormente** se $\exists\, m$ t.c. $f(x) \ge m \,,\ \forall x \in D$



- f è limitata se $\exists\, m$ e M t.c.

$$m \le f(x) \le M \quad , \forall x \in D$$

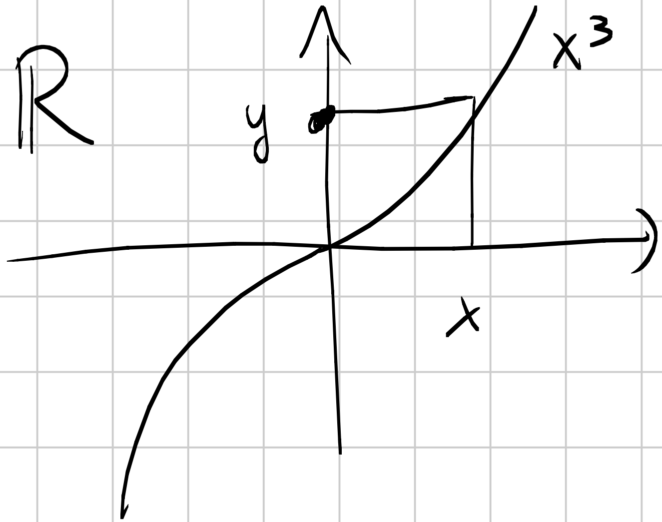


si può anche scrivere

$$|f(x)| \le K$$

$$-K \le f(x) \le K$$

es. $f_1(x) = x^3$ $D = \mathbb{R}$

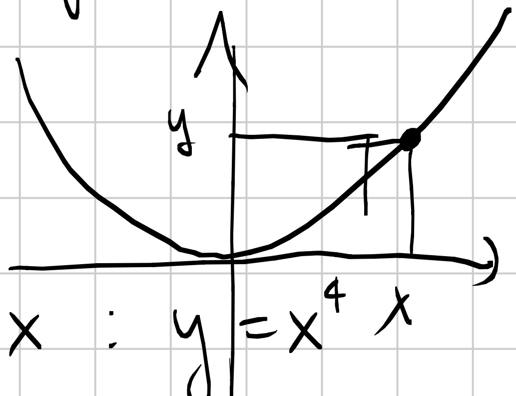


$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

$(\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} : y = x^3)$

non è limitata né sup. né inferiormente.

es. $f_2(x) = x^4$ $D = \mathbb{R}$

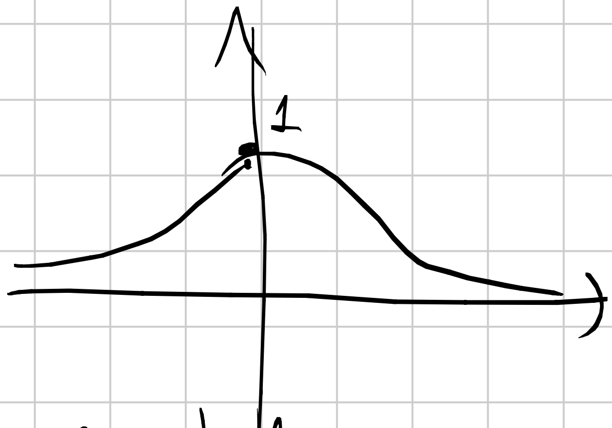


$\mathrm{Im} f_2 = [0, +\infty)$ $\forall y \geq 0 \ \exists x : y = x^4$

f è limitata inferiormente ma non superiormente.

es. $f_3(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$



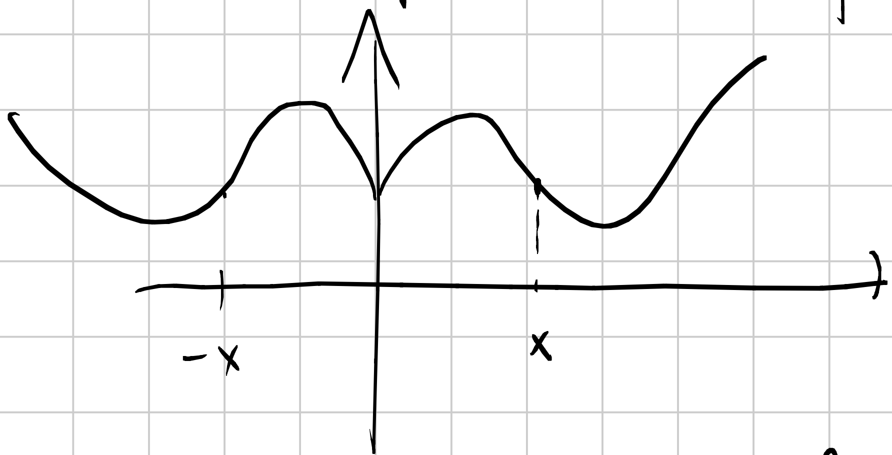
funzione limitata.

Funzioni simmetriche

D = dominio è simmetrico rispetto a $x=0$.

Funzione pari:

$$f(-x) = f(x)$$

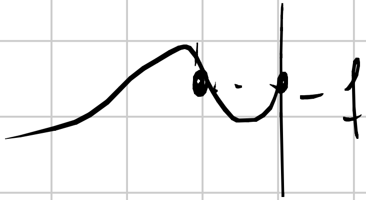


il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate

Funzione dispari

$$f(-x) = -f(x)$$

grafico simmetrico rispetto all'origine



degli assi

es

$$f(x) = x^2 \qquad \text{pari}$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$f(x) = x^3 \qquad \text{dispari}$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

$$f(x) = x^n \begin{cases} \text{è pari se } n \text{ è pari} \\ \text{è dispari se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

es.

$$f(x) = x - x^3 - x^{17}$$

$$f(-x) = -x - (-x)^3 - (-x)^{17} = -x + x^3 + x^{17}$$

$$= -f(x)$$

$$f(x) = x - x^3 + 1$$

$$f(-x) = -x - (-x)^3 + 1 = -x + x^3 + 1$$

non è né pari
né dispari

Funzioni monotòne

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

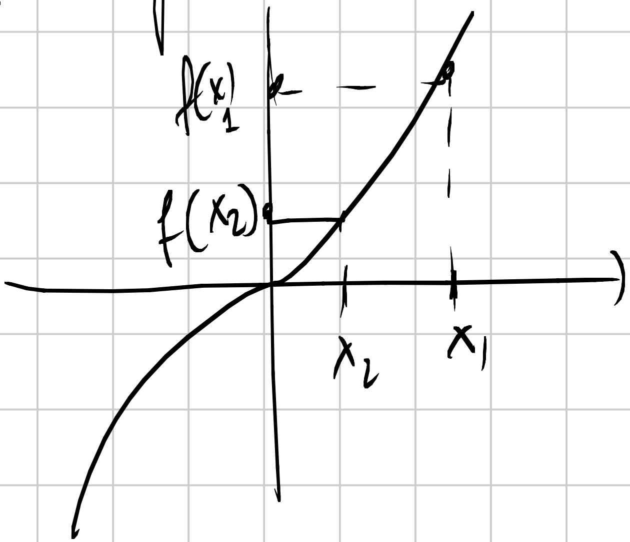
f è monotòna crescente se $\forall x_1, x_2 \in D$ $x_1 > x_2$
(non decrescente) $\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

se vale $f(x_1) \underset{\neq}{>} f(x_2)$ f è strettamente crescente

f è monotòna decrescente se $\forall x_1, x_2 \in D$
(non crescente) $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

se $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ è strett. decrescente.

es. $f(x) = x^3$

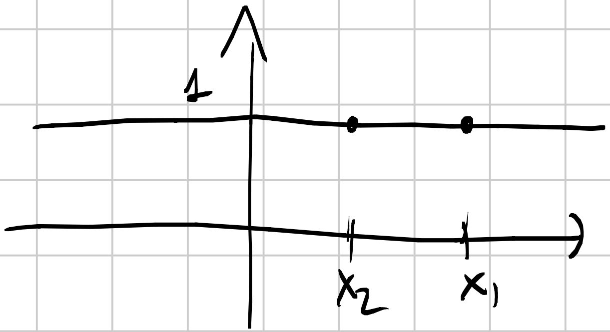


$x_1 > x_2 \Rightarrow$

$f(x_1) > f(x_2)$

è strettamente crescente

es. $f(x) = 1$



$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ sì!

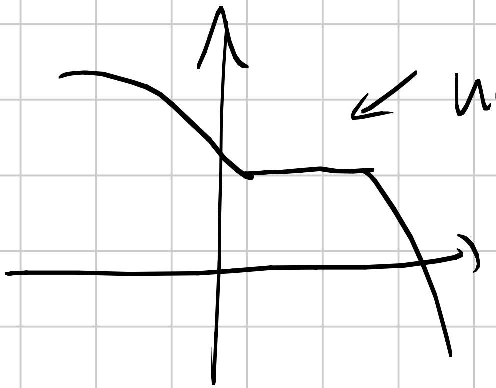
$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ sì!

f è monotone sia crescente che decrescente.

es.

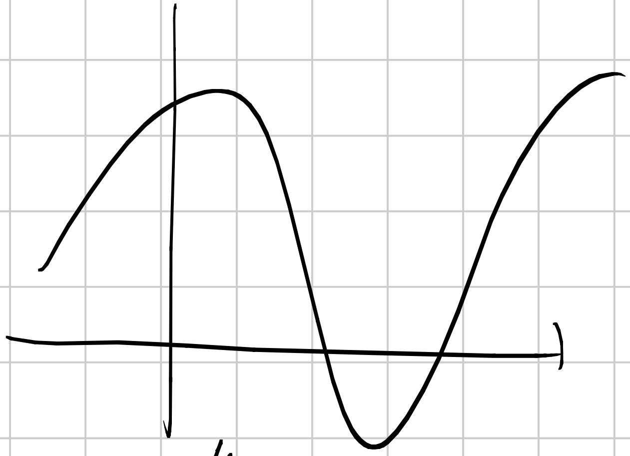
è non decrescente

es.



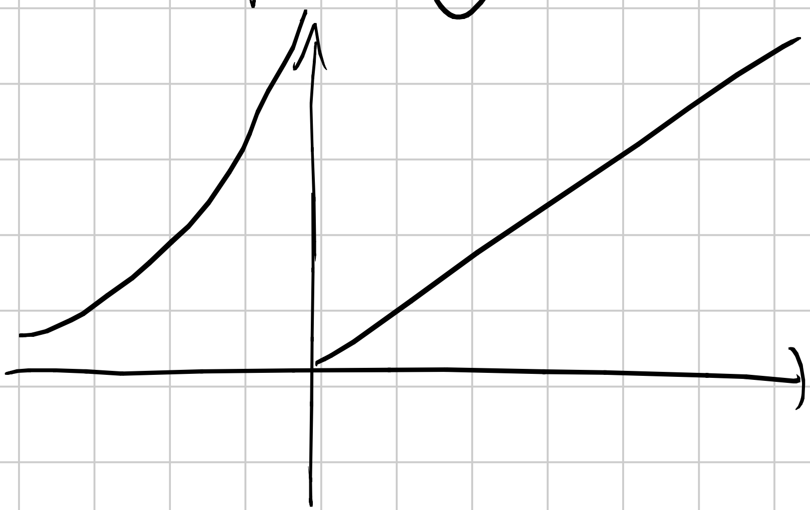
non crescente

es



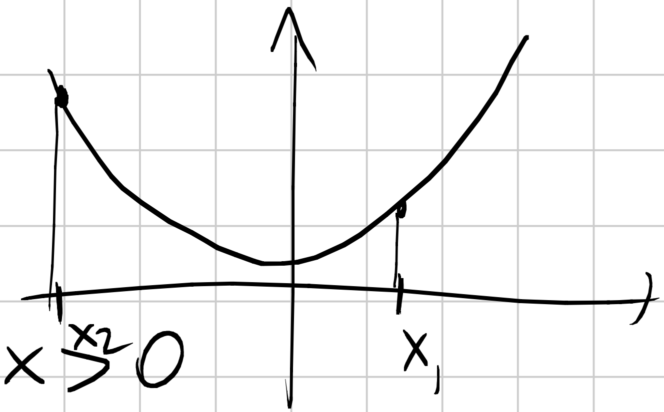
non è monotòne

es.



non è monotòne.

es. $f(x) = x^2$



è strett. crescente per $x \geq 0$

è strett decrescente per $x < 0$

$$x_1 \geq x_2 \overset{?}{\Longrightarrow} (x_1)^2 \geq (x_2)^2$$

è vero sse $x_1, x_2 > 0$

es. $\underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{x_1} > \underbrace{\frac{x}{2}}_{x_2}$

1) $\frac{x}{2} < 0$ ....

2) $\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow$ elevo al quadrato

<u>Funzioni periodiche</u> $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

è <u>periodica</u> di periodo T, $T > 0$ se

T è il più piccolo numero reale t.c.

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in D$$

es. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $\cos x$ $\quad T = 2\pi$

$$\operatorname{sen}(x + 4\pi) = \operatorname{sen} x$$

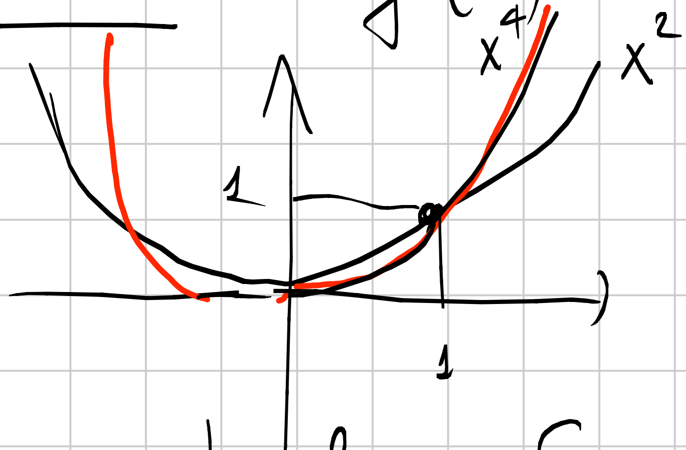
oss. Basta disegnare il grafico nell'intervallo di ampiezza T per conoscere il grafico su tutto il dominio

Funzioni elementari

Funzioni potenza

$f(x) = x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

$D = \mathbb{R}$



$\boxed{n \text{ pari}}$

$f(1) = 1$

$\mathrm{Im} f = [0, +\infty)$

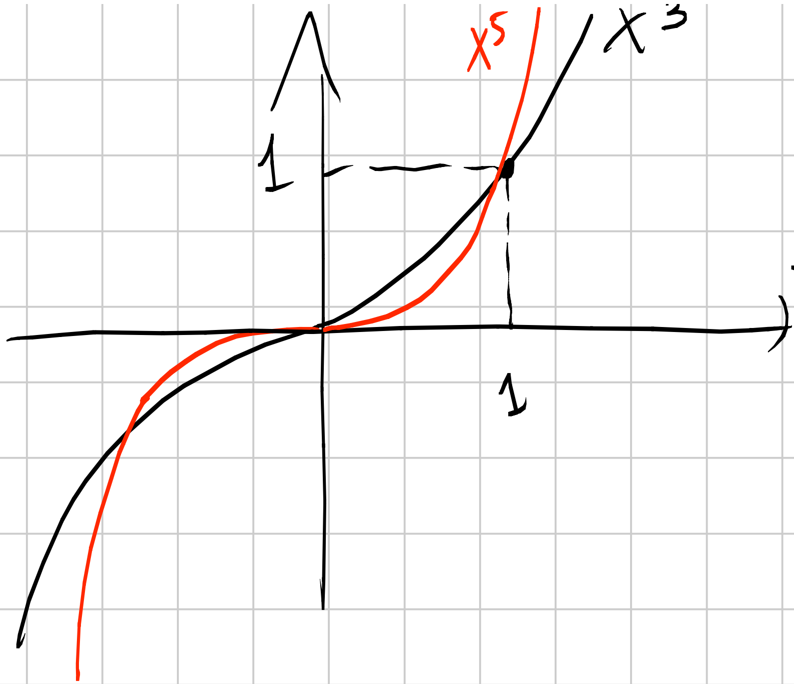
f pari

$f(x) = x^n$

strett. crescente

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

f dispari

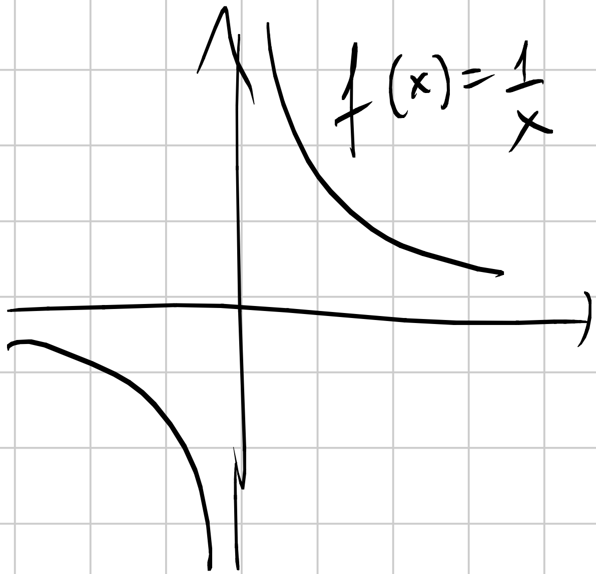


$\boxed{n \text{ dispari}}$

• $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{Z}$, $r < 0$

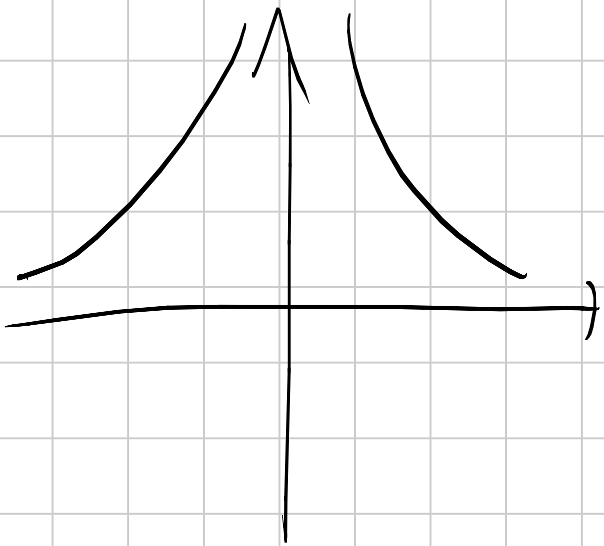
$r = -1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $r = -2$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f(x) = \frac{1}{x}$ f dispari

non sono monotone



$f(x) = \frac{1}{x^2}$ f pari

• $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ $\quad x > 0$

Ma se n è dispari anche se $x < 0$

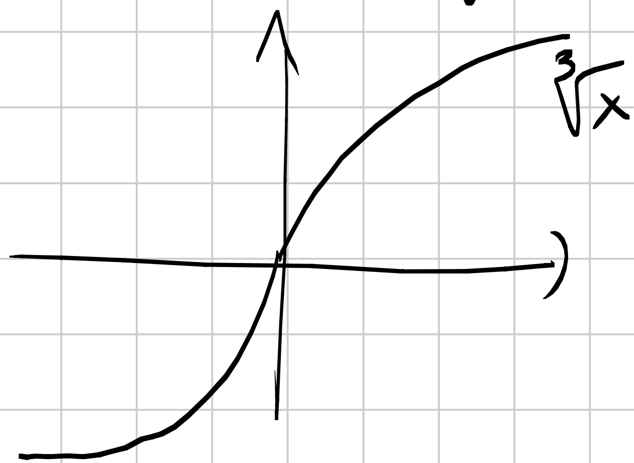
$$\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x} \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

cioè è dispari

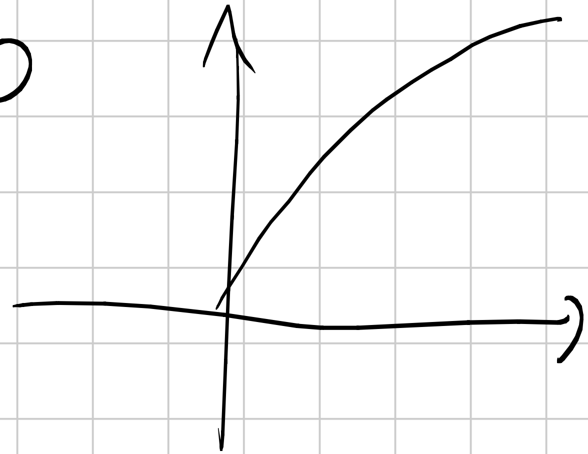
se $x < 0$

es: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$x = 0 \quad f = 0$



$f(x) = \sqrt{x} \qquad x \geq 0$

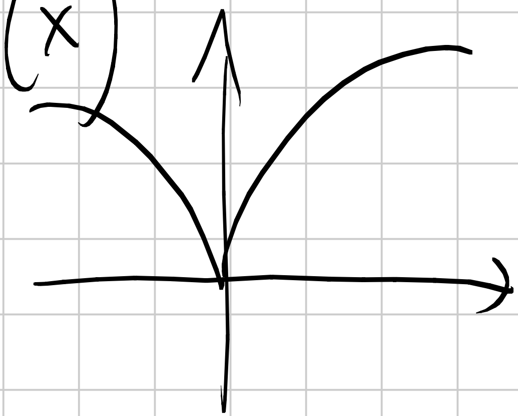


$= x^{1/2}$

$f(x) = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$

f pari



In generale

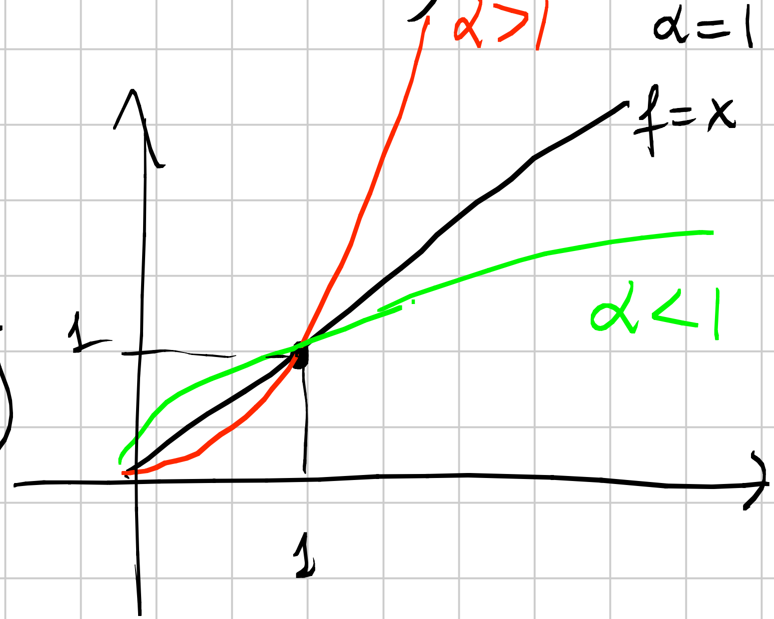
$$f(x) = x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{def per } x>0$$

(se $\alpha \geq 0$ va bene anche $x=0$)

$$D = \{x>0\}$$

$$\alpha > 0 \qquad D = \{x \geq 0\}$$

$$\text{dom } f = [0, +\infty)$$



$\mathrm{Im} f = [0, +\infty)$

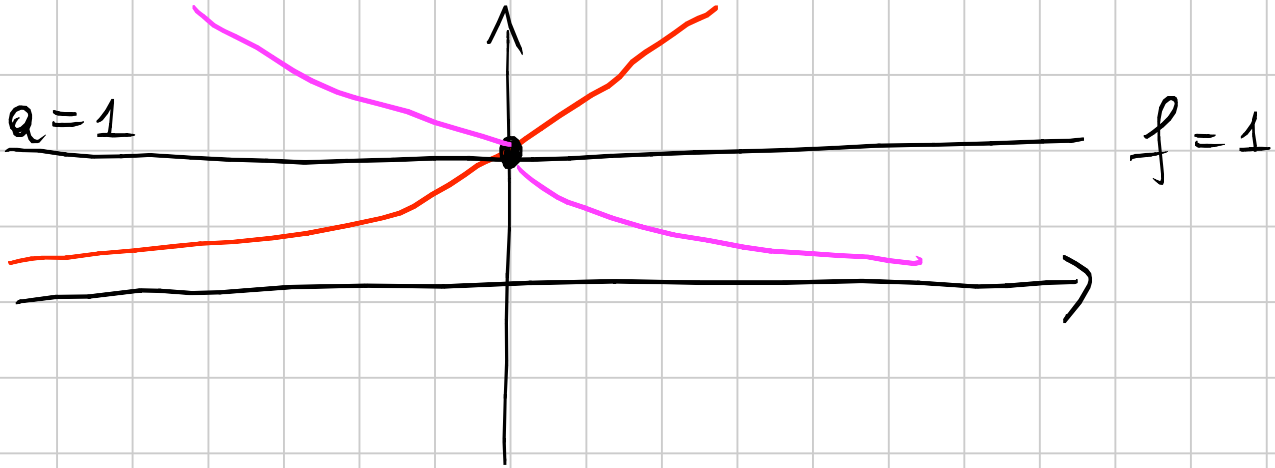
Funzioni esponenziali e logaritmiche

$a > 0$, $a \in \mathbb{R}$

$f(x) = a^x$ funz. esponenziale di base a

$D = \mathbb{R}$ $\mathrm{im} f = (0, +\infty)$

$a < 1$ $a > 1$ $f(0) = 1$ $\forall a$



$a=1$

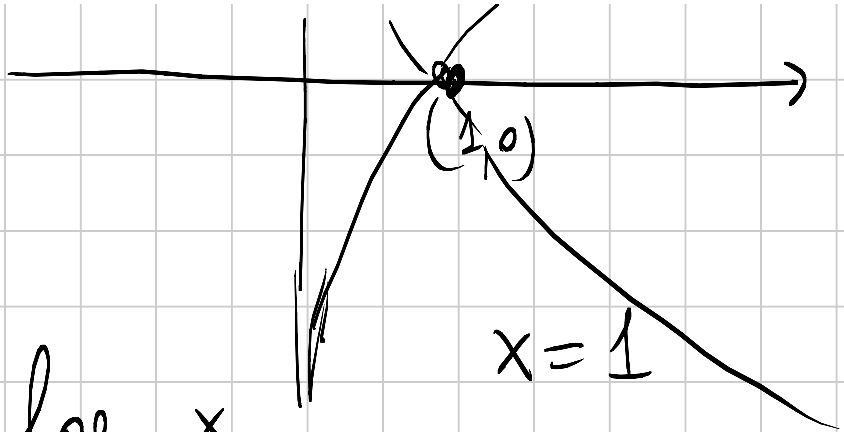
$a>1$

$f(x) = \log_a x \quad , \quad x>0 \qquad D=\{x>0\}$

$y = \log_a x \iff a^y = x \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

$a \neq 1$

per $a=1$ il log non è definito



$a > 1$

$y = \log_a x$

$\log_a 1 = 0 \quad \forall a$

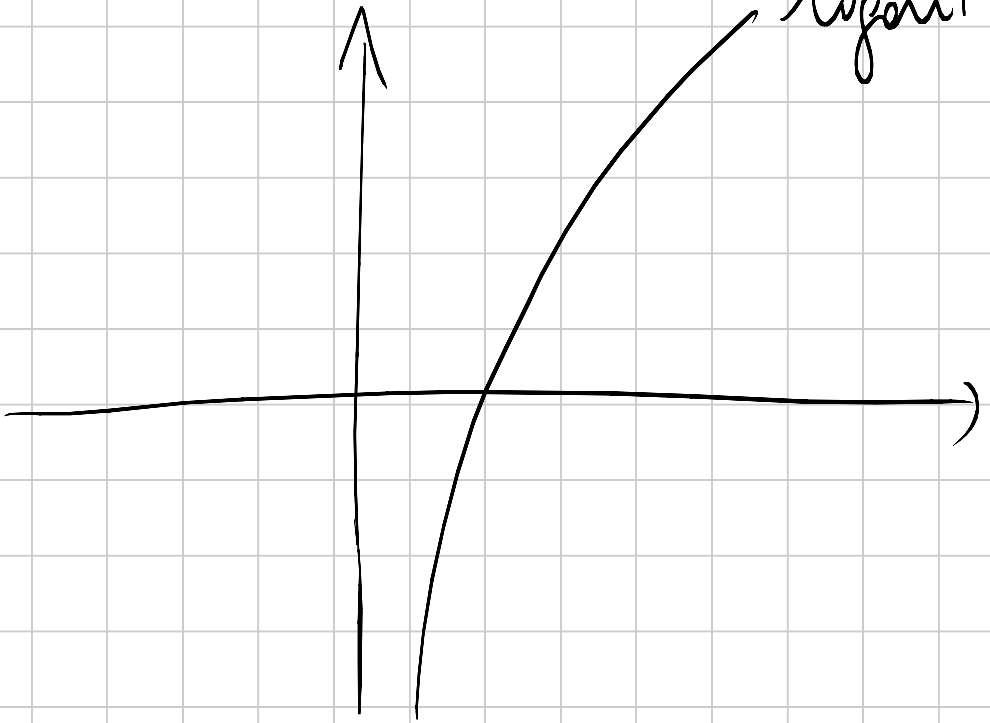
Spesso si prende come base $a = e$

numero di Nepero

$e = 2,71 \ldots\ldots$

$$\log_e x = \ln x = \log x$$

logaritmo naturale



$e > 1$

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}$$

$$\left(y = e^{\log y}\right)$$

$$\ln(a^n) = n \log a$$