

Lezione del 12 Novembre

Soluzione es. 9 $(x + \sqrt{x}) \sin\left(\frac{5}{x}\right)$

$x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{x} = y$$

$\rightarrow 5$
 $\text{sen}(5x)$
 No! $\text{sen}\left(\frac{y}{5}\right)$ non $\frac{1}{5}$

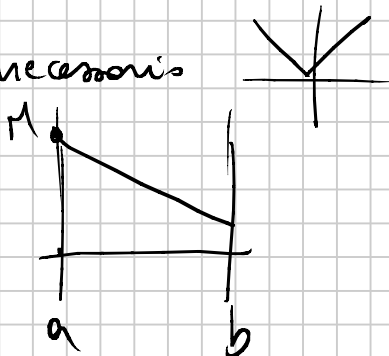
Estremi (locali o globali) di una funzione

l.h. di estremi

Teo. di Fermat f definita in (a,b) , derivabile
 in $x_0 \in (a,b)$, con x_0 l.h. di estremo
 locale $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

1) f derivabile in x_0 , è necessario

2) x_0 interno ad (a,b)

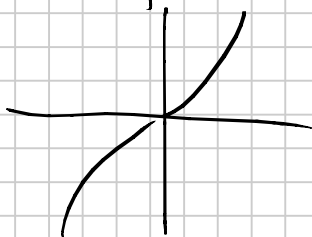


oss. se $f'(x_0) = 0$ $\nRightarrow$ x_0 l.h. di estremo

$$f(x) = x^3$$

$$x=0 \quad f'(0) = 0$$

ma $x=0$ non è l.h. di estremo



$x: f'(x) = 0$ a chiamano l.h. stazionari
 nei p.t. in cui f è derivabile

stazionari
 Q l.h. di estremo

$$f(x) = \sin x$$

f h' monotoni

$$f'(x) = 0$$

$$\cos x = 0$$

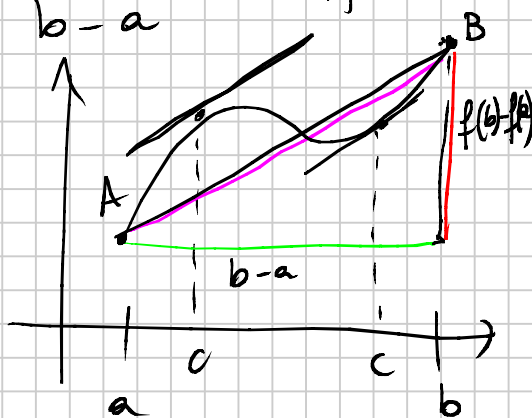
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Teorema del Valore medio (e di Lagrange)

f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b)

allora $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ è la
pendenza
della secante
passante per A e B
pendenza media



pendenza media = pendenza in un p.to

Dim. rette passante per A e B (violetta!)

$$A = (a, f(a))$$

$$B = (b, f(b))$$

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} (x - a)$$

retta violetta



$$W(x) = f(x) - \text{retta}$$

$$W(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right]$$

$$w(a) = 0 = w(b)$$

$w(x)$ continua in $[a, b]$

$w(x)$ derivabile in (a, b)



per Weierstrass $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ t.c.

$w(x_1) = M$ massimo (libro no!)

$w(x_2) = m$ minimo

1) $M = m$ w è costante in $[a, b]$

$$\Rightarrow w'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$w'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

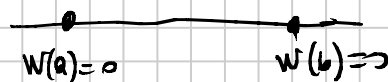
$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x \in [a, b]$$

2) $M > m$

per $w(x) = 0$

agli estremi

il p.to di max o il p.to di minimo
è interno ad (a, b)



w è derivabile in tutti i p.to interni

Applico il teorema di Fermat a w

e quindi nel p.to di estremo $\bar{x}$ so che

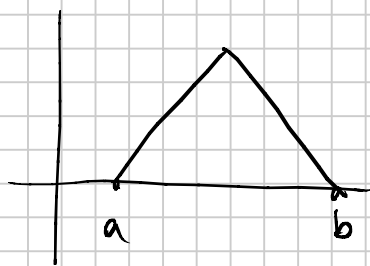
$$w'(\bar{x}) = 0$$

$$w'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \bar{x} \in (a, b).$$

#

oss. Serve la derivata bolite $\forall x \in (a, b)$



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\exists c: f'(c) = 0 \quad ?$$

No!

Teorema (test di monotonia).

f derivabile in (a, b) . Allora

f crescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$

f decrescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$

Dim. $\Rightarrow$ Hp f crescente in (a, b)
Ts. $f'(x) \geq 0$ in (a, b)

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0$$

$z > x \Rightarrow f(z) \geq f(x)$

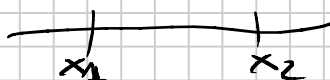
per il teorema della
permanenza
del segno.

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \text{ in } (a, b).$$

$\Leftarrow$

Hp $f'(x) \geq 0$ in (a, b)
Ts $f(x)$ è crescente in (a, b)
 $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

$$f'(x) \geq 0$$



(x_1, x_2) applico il teo. di Lagrange

$$\exists c \in (x_1, x_2) \text{ t.c. } f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\text{per ipotesi } f'(c) \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

$$\text{se } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \quad \#$$

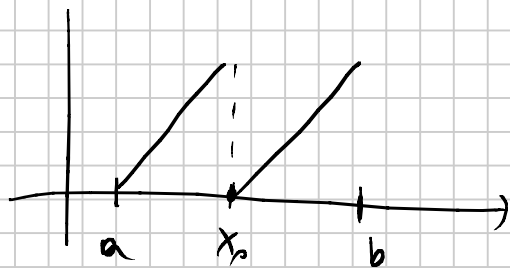
$$\text{oss. } \text{Hp. } f'(x) \geq 0 \quad \text{Ts. } f \text{ crescente in } (a, b)$$

$$\text{Hp } \lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} \geq 0 \quad \text{Ts } \frac{f(z) - f(c)}{z - c} \geq 0$$

non vale permanentemente del segno

$$\text{se } \lim_{z \rightarrow c} h(z) \geq 0 \quad \not\Rightarrow h(z) \geq 0$$

oss. f deve essere derivabile in tutta (a, b) .
senno' il teo. non vale



$f' \geq 0$ dove esiste
ma f non è crescente
in (a, b)

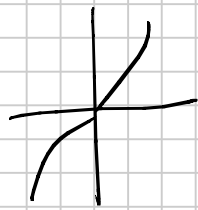
$$\begin{array}{lll} \text{in } (a, x_0) & f' \text{ derivabile } f' \geq 0 & \Rightarrow f \text{ è crescente in } (a, x_0) \\ \text{in } (x_0, b) & \text{"} & \Rightarrow f \text{ è crescente in } (x_0, b) \end{array}$$

oss. Stesse dim.

$$f' > 0 \Rightarrow f \text{ è strett. crescente}$$

$$f' < 0 \Rightarrow f \text{ " " decrescente}$$

ma non vale il viceversa
 f è strutt. crescente $\nRightarrow f' > 0$ in (a,b) .
 $f(x) = x^3$ è strutt. crescente ma $f' \geq 0$



$$x=0 \quad f'(0)=0.$$

(si può dire
 solo $f'(x) \geq 0$).

Prop. (funzioni a derivata nulla)
 f derivabile in (a,b)

$$f'(x) = 0 \text{ in } (a,b) \Leftrightarrow f \text{ è costante in } (a,b).$$

Dim. $\Leftarrow$ ovvio

$\Rightarrow$ dim. che $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$
 $f(x_1) = f(x_2)$

Lagrange

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c) = 0 \quad \exists c \in (a,b)$$

frattori

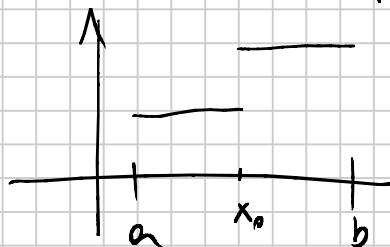
$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1, x_2. \quad \#$$

Se si facesse con

H.p. $f'(x) = 0$ $\lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = 0$

$\Rightarrow ?$ mi blocca.

oss. è cruciale che f sia derivabile in (a,b)
 (tutto!)



$f'(x) = 0$ dove
 è derivabile
 ma f non è
 costante

Conseguenza f, g derivabili in (a, b)

$$f'(x) = g'(x) \text{ in } (a, b) \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

$c \text{ costante}$

Dim. $(f - g)' = f' - g' = 0 \text{ in } (a, b)$

$\rightarrow$ dal teorema della derivata nulla, occorre
 $f - g$ è derivabile in $(a, b) \Rightarrow$

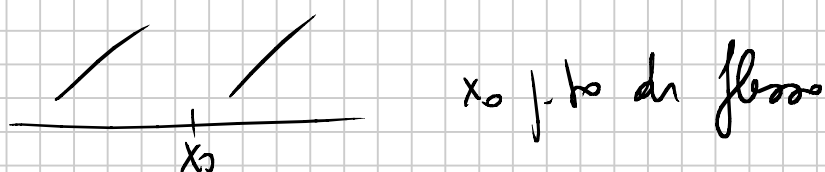
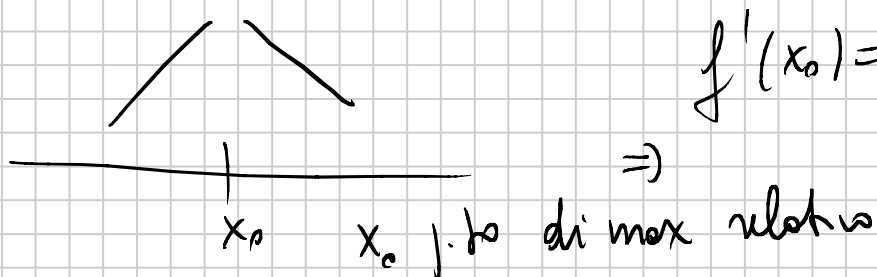
$$f - g = \text{Costante}$$

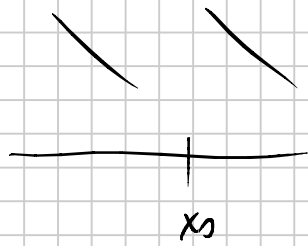
$$f = C + g \text{ in } (a, b),$$

Ricerca di max e min

f derivabile in $[a, b]$. per cercare i max e i min di f in $[a, b]$:

- 1) Si calcola $f(a), f(b)$.
- 2) Si cercano i p.ti stazionari: $f'(x) = 0$
tra di essi si vede cosa fa il segno della derivata in un intorno di essi.





x_0 p.to di f.to.

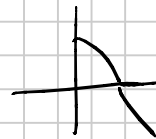
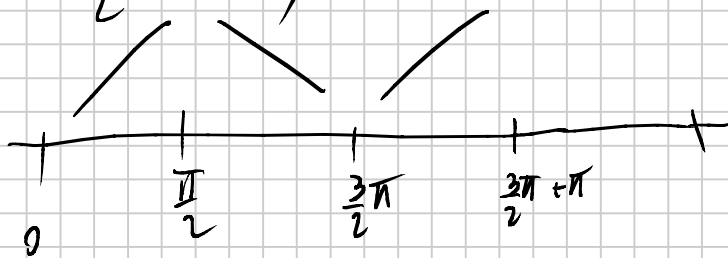
3) Si calcola f nei p.ti stazionari
e si confrontano i valori con $f(a)$ e $f(b)$
per trovare il massimo e minimo globale

es. $f(x) = \sin x$ $x \in \mathbb{R}$
derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

p.ti stazionari $f'(x) = \cos x = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$[0, 2\pi]$



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

max globale

$$x = \frac{\pi}{2}$$

p.to di max relativo

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

min globale

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

p.to di min relativo

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

p.ti di massimo globale.

$$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

" " minimo " .

$$f(x) = e^x$$

$$x \in \mathbb{R}$$

derivabile in $\mathbb{R}$

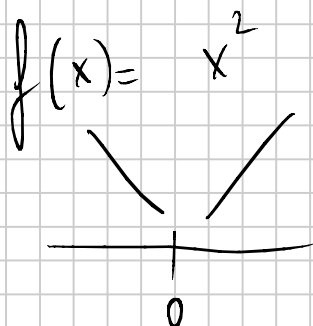
$$f'(x) = e^x > 0$$

$\Rightarrow f$ strett. crescente
 e^x

$f(x) = \arctan x$ $x \in \mathbb{R}$ derivabile in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f è strett. crescente $\forall x \in \mathbb{R}$



$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

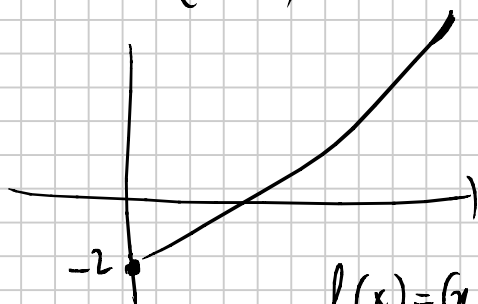
$x = 0$ p.to di minimo globale.

es. dire se $\exists$ e quante sono le soluzioni di
 $(x-1)e^x = (x+1)e^{-x}$

$$f(x) = (x-1)e^x - (x+1)e^{-x} \quad f(0) = -2$$

si cercano gli zeri: $f(\bar{x}) = 0$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x-1)e^{-x} - (-x+1)e^x = \\ &= -(x+1)e^{-x} + (x-1)e^x = f(x) \end{aligned}$$



$\bar{x}$ zero
 $x > 0$

$$f(x) = (x-1)e^x - (x+1)e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^x - \frac{(x+1)}{e^x} = +\infty$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + (x-1)e^x - e^{-x} + (x+1)e^{-x} \\ &= \cancel{e^x} + x\cancel{e^x} - \cancel{e^x} - \cancel{e^{-x}} + x\cancel{e^{-x}} + \cancel{e^{-x}} = \end{aligned}$$

$$= x(e^x + e^{-x}) > 0 \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3 2 sei, con due soluzioni dell'eq

Esercizi su limiti

$$\lim_n \frac{n^3 \sin \frac{1}{n} + 3^{n^2 \log n} - (-1)^n n^2}{n^{1/2} - n \sin n}$$

$$\frac{1}{n} = x$$

$$\underline{N.} \quad \lim_n n \sin \frac{1}{n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$n^3 \sin \frac{1}{n} = n^2 \left(n \sin \frac{1}{n} \right)$$

$$N \div n^2 \left(n \sin \frac{1}{n} \right) + e^{n^2 \log n \log 3} - (-1)^n n^2$$

$$e^{n^2 \log n \log 3} \left(1 + \frac{n^2 \left(n \sin \frac{1}{n} \right)}{e^{n^2 \log n \log 3}} - \frac{(-1)^n n^2 - n^2 \log n \log 3}{e^{n^2 \log n \log 3}} \right)$$

$$\frac{n^2 \left(n \sin \frac{1}{n} \right)}{e^{n^2 \log n \log 3}}$$

$$\frac{e^{2 \log n}}{e^{n^2 \log n \log 3}} =$$

$$= \frac{1}{e^{n^2 \log n \log 3 - 2 \log n}} \rightarrow 0$$

$$(-1)^n n^2 - n^2 \log n \log 3 =$$

$$= -n^2 \log n \left(\log 3 - \frac{(-1)^n n^2}{n^2 \log n} \right) \rightarrow -\infty$$

D. $n^{1/2} - n \text{ sum } n =$

$$= n^{1/2} \left(1 - \frac{n \text{ sum } n}{\sqrt{n} n} \right)$$

$$\frac{\text{sum } n}{\sqrt{n} - 1} \rightarrow 0$$

$$\frac{n}{n} \rightarrow +\infty$$

$$\lim \left(\frac{n^2 \log n \log 3}{e} \cdot \frac{e}{\sqrt{n} n} \right) = \lim_n \frac{n^2 \log n \log 3}{\sqrt{n} n} \cdot \frac{e}{e} \cdot \frac{(1+\dots)}{(1+\dots)}$$

$$\frac{n^2 \log n \log 3}{e} \cdot \frac{e}{\sqrt{n} n} = e \cdot \frac{n^2 \log n \log 3 - \sqrt{n} \log n}{\sqrt{n} n} \rightarrow +\infty$$

$$\text{es. } f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2(e^{x-1} - 1)} & x \neq 1 \\ \alpha - 1 & x = 1 \end{cases}$$

per quali α la f è continua in $x=1$?
 e negli altri con dire che tipo di discontinuità c'è.

deve essere

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \alpha - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sin(x-1) + (x-1)^2}{2(e^{x-1} - 1)} =$$

$$\begin{aligned} x-1 &= t \\ x \rightarrow 1 & \\ t &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\sin t + t^2}{2(e^t - 1)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\sin t + t^2}{2(e^t - 1)t} = 1$$

f è continua
 sse

$$1 = \alpha - 1$$

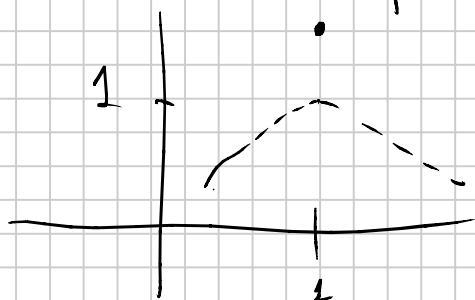
$$\text{sse } \alpha = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = \alpha - 1$$

$$\text{se } \alpha \neq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1)$$

funzione continua in $x=1$



discontinuità
rimovibile

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x)(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)}{(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3x + 2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{(-x) \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(3 + \frac{2}{x} \right)}{(-\cancel{x}) \left(\sqrt{\quad} + 1 \right)} = -\frac{3}{2}$$

$\nearrow 2$ (pointing to the square root term in the denominator)
 $\searrow 2$ (pointing to the square root term in the denominator)

$$\begin{aligned} & \underline{\text{L.}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{x+1} - 3^{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{x+1} \left(1 - 3^{\sqrt{x^2+1} - (x+1)} \right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2+1} - (x+1) = \frac{(\sqrt{x^2+1} - (x+1))(\sqrt{x^2+1} + (x+1))}{\sqrt{x^2+1} + (x+1)}$$

$$= \frac{x^2+1 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+1} + (x+1)} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+1} + (x+1)}$$

$$\text{Für } x \rightarrow +\infty \quad \rightarrow \frac{-2}{2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{x+1} \left(1 - 3^{-1} \right) = +\infty$$