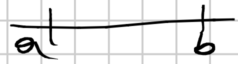
13 11 13

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$



Teorema de l'Hôpital

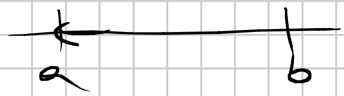
$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a,b), $a,b \in \mathbb{R}^*$

1) $\lim\limits_{x\to a^+} f = \lim\limits_{x\to a^+} g = 0$ (oppure $= \pm\infty$)

2) $g(x)$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

3) $\exists \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, $L \in \mathbb{R}^*$

allora $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$



Dim. (diversa dal libro)

Suppongo che f' e g' siano continue in a (da dx)

anche f e g sono continue in a

$f(a) = 0$ per ipotesi 1)

$g(a) = 0$

per ipotesi 2) $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow g(x)$ è strett. monotona

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \frac{(x-a)}{(x-a)}$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} \cdot \frac{x-a}{g(x)-g(a)}$$

$$= \frac{f'_+(a)}{g'_+(a)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$\downarrow$ per la continuità da dx di f' e g' #

oss. analogo risultato per $x \to b^-$, o per $x \to x_0 \in (a,b)$.

es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x}$

$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'}{g'}$? $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ si!

$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

es. $\lim_{x \to 0^+} x \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$

$\exists \lim_{x \to 0^+} \frac{f'}{g'}$? $\frac{f'}{g'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$

es. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ abbiamo usato il limite notevole!

es. è importante che valga l'ipotesi 3):

$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'}{g'}$.

se $\nexists \lim \frac{f'}{g'} \not\Rightarrow \nexists \lim \frac{f}{g}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$

provo con l'Hôpital

$$\frac{f'}{g'} = \frac{1+\cos x}{1} \qquad \lim_{x\to+\infty} 1+\cos x \ \nexists$$

ma $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g}$

oss. È essenziale che $\frac{f}{g}$ sia del tipo $\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = +\infty \qquad \frac{f}{g} \to +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x} = -1/2 \qquad \frac{f'}{g'} \to -1/2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta} \qquad \frac{f}{g}$$

$$\frac{f'}{g'} = \frac{3ax^2+2bx+c}{3\alpha x^2+2\beta x+\gamma} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{f''}{g''} = \frac{6ax+2b}{6\alpha x+2\beta} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{f'''}{g'''} = \frac{\cancel{6}a}{\cancel{6}\alpha} \to \frac{a}{\alpha}$$

$ax^3+bx^2+\dots$
$\alpha x^3+\beta x^2+\dots$
sono infiniti di ordine 3.

es. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$ $\frac{f}{g}$ con l'Hôpital

$$\frac{f'}{g'} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\,\frac{2}{x^3}}{1} = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t \to +\infty} e^{-t^2} \, t \qquad \frac{1}{x} = t$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{t^2}} \qquad \frac{f}{g} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

$$\frac{f'}{g'} = \frac{1}{e^{t^2} \cdot 2t} \to 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0$$

$$e^{-1/x^2} = o(x) \qquad x \to 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\sqrt{x} + x^3 + e^{-1/x^2}}_{\text{è infinitesimo di ordine } 1/2} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \left(1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^{\frac{5}{2}}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{e^{-1/x^2}}{\sqrt{x}}}\right)$$

In generale si può dim. che $\frac{e^{-1/x^2}}{x} \to 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

$$\boxed{e^{-1/x^2} = o(x^\alpha), \quad x \to 0^+, \quad \text{con } \alpha > 0}$$

es. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^x}{\log(1+x) - x}$$

$$\frac{f'}{g'} = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x - e^x}{\frac{1}{1+x} - 1}$$

$$\frac{f''}{g''} = \frac{-\operatorname{sen} x - \cos x - e^{x}}{-\frac{1}{(1+x)^2}} \to 2$$

$-\operatorname{sen} x - \cos x - e^{x} \to -2$, $\quad -\frac{1}{(1+x)^2} \to -1$

abbiamo dovuto fare 2 derivate perché sia f che g sono infinitesimi di ordine 2

Con i limiti notevoli

$$\frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^{x}}{\log(1+x) - x} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1 + 1 - e^{x}}{x\left(\frac{\log(1+x)}{x} - 1\right)}$$

$\frac{\log(1+x)}{x} \to 1$, $\quad \frac{\log(1+x)}{x} - 1 \to 0$

$$\frac{e^{x}-1}{x} \to 1 \qquad \frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x} + \frac{1-e^{x}}{x}$$

$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$, $\quad \frac{\cos x - 1}{x} \to 0$, $\quad \frac{1-e^{x}}{x} \to -1$

$\Rightarrow \frac{0}{0}$ sempre indeterminata!

con i limiti notevoli non si riesce a concludere!

Alcuni limiti se si deriva si peggiora la situazione

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\operatorname{sen}\sqrt{x})^5 \cos x}{\log(1+x)\sqrt{\operatorname{arctg} x^2}}$$

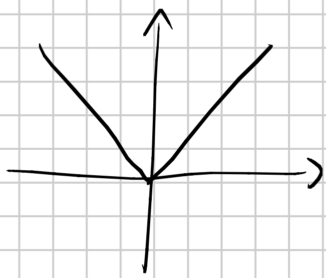
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x^4} - 2x^x}{3^x + e^{3x}}$$

Teo. f continua in $x=a$. Se esiste $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, allora esiste la derivata destra $f'_+(a)$ e coincide con tale limite.
(finito o infinito)

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

Dim. no!

es. $f(x) = |x|$



è continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

se $x \neq 0$

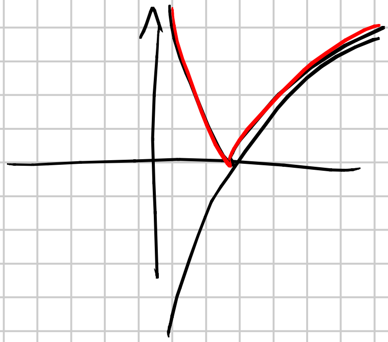
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Il teorema di sopra

$$f'_+(0) = 1 \qquad f'_-(0) = -1$$

$|x|$ non è derivabile in $x=0$ e in $x=0$ p.to angoloso.

es. $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ fatelo voi es. $f(x) = |\log x|$



$$f(x) = \begin{cases} \log x & \log x \geq 0 \\ -\log x & \log x < 0 \end{cases}$$

se $\log x \neq 0$ $\quad (x \neq 1)$

$$f(x) = \begin{cases} \log x & x \geq 1 \\ -\log x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

se $x \neq 1 \Rightarrow f(x)$ è derivabile

in $x = 1$ $\quad f(x)$ è continua, $f(x)$ è derivabile?

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ -\frac{1}{x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) \underset{\text{Teorema}}{=} \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$f'_-(1) \underset{\text{Teorema}}{=} \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1$$

$f = |\log x|$ non è derivabile in $x = 1$ e lì c'è un p.to angoloso.

In generale la derivabilità di $|f(x)|$ nei p.ti t.c. $f(x) = 0$ dipende da come è fatta $f(x)$.

es. $|\operatorname{sen} x|$

$\downarrow$ $\operatorname{sen} x = 0$

dimostrate che è continua in $\mathbb{R}$
ma che non è derivabile in $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

es. $f(x) = |x^3| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$

f è continua su tutto $\mathbb{R}$
f è derivabile " " ?

$x \neq 0$ sì

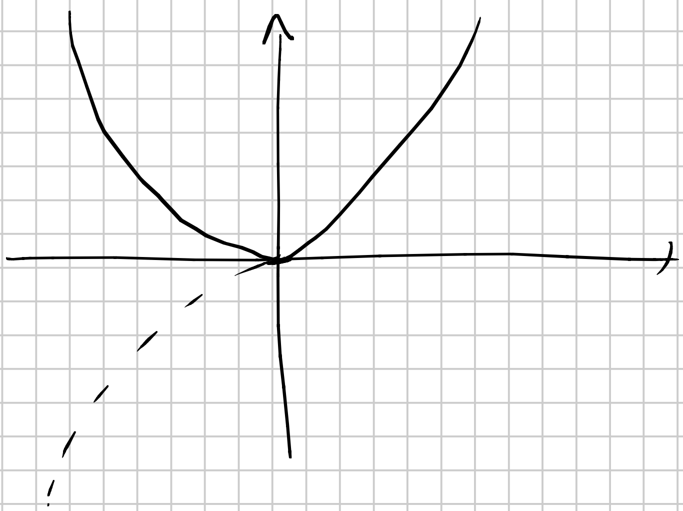
$x = 0$?

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 3x^2 = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-3x^2) = 0$$

quindi f è derivabile anche in $x = 0$
e $f'(0) = 0$



PC. $f(x) = e^{|x-1|}$ studiarne continuità e derivabilità.

(R. f.to angoloso in $x=1$
$f'_+(1) = 1$
$f'_-(1) = -1$)

es. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$D = \mathbb{R}$

f è continua in $\mathbb{R}$?

$x \neq 0$ $\quad e^{-1/x^2}$ sì!

$x = 0$? $\quad \lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} \overset{?}{=} 0$ sì!

f è continua anche in $x = 0$ $\qquad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

f è derivabile in $\mathbb{R}$

$x \neq 0$ $\quad f'(x) = e^{-1/x^2} \dfrac{2}{x^3}$

$x = 0$ $\quad \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^3} \cdot 2 = 0$ fatto prima

$\Rightarrow \exists\ f'(0) = 0$

$f(x)$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

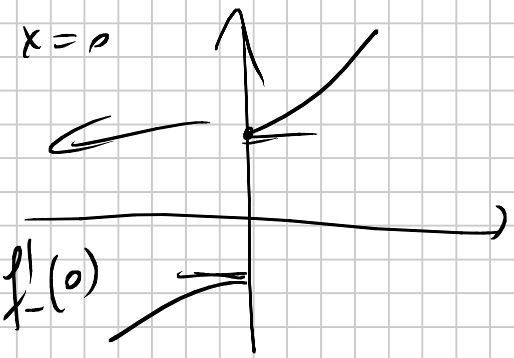
studiare continuità e la derivabilità.

$x \neq 0$ $\quad f$ è continua e derivabile

$x = 0$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 + x^2 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x^2 - 1 = -1$

f non è continua in $x = 0$



attacchi di f appunto $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$

mi calcolo

$$f' = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} f' = \lim_{x \to 0^+} 2x = 0$ $\quad f'_+(0)$

sono uguali

$\lim_{x \to 0^-} f' = \lim_{x \to 0^-} -2x = 0$ $\quad f'_-(0)$

ma $\nexists f'(0)$

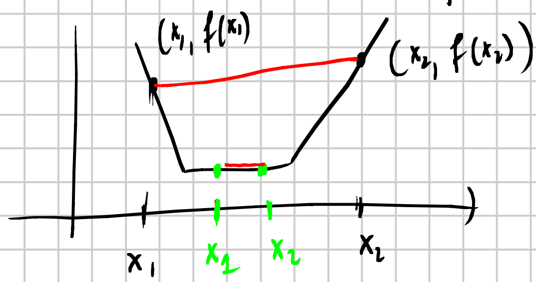
perché f non è continua in $x = 0$

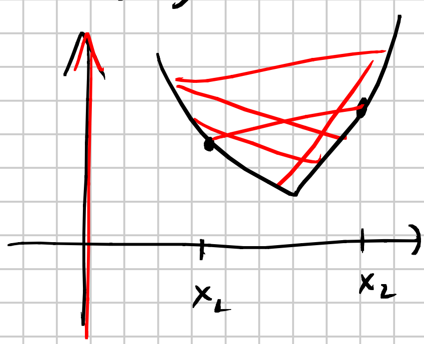
Funzioni convesse

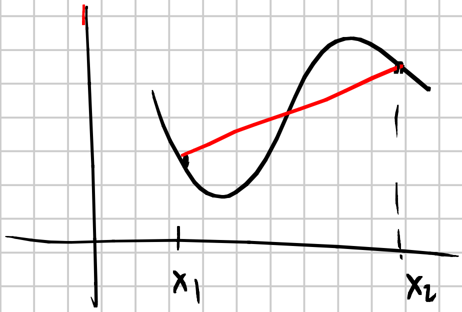
Def. $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo

f convessa in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto il grafico di f.
Se gli unici punti in comune con il grafico sono gli estremi la funzione si dirà strettamente convessa

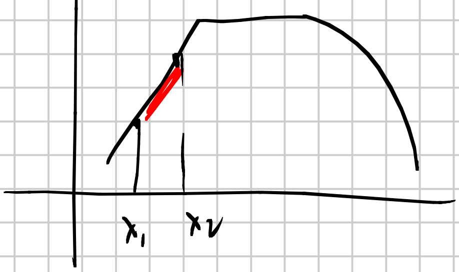
(sotto → sopra $\quad$ f concava e strett. concava
f è concava se $-f$ è convessa).







concave



Si scrive analiticamente così:

$$\forall\, x_1, x_2 \in I : \ f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(f convessa).

Teo. f derivabile in (a,b)

f convessa in (a,b) $\iff$ f' è crescente in (a,b) $\iff$

$\iff$ $\forall x_0 \in (a,b)$ $\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\quad \forall x \in (a,b)$

analogamente

f è strett. convessa $\iff$ f' strett. crescente $\iff$

$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$x \neq x_0$

Teorema Se f è derivabile due volte in (a,b)

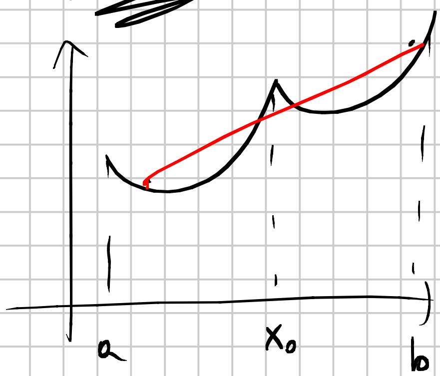
f convessa in (a,b) $\iff$ $f''(x) \geq 0$ $\quad \forall x \in (a,b)$

$f''(x) > 0 \implies f$ strett. convessa

$\left(f \text{ strett. convessa} \not\Rightarrow f''(x) > 0 \right)$

---

oss. Se non abbiamo l'ipotesi f derivabile 2 volte in (a,b) non è vero!



f'' tra (a, x_0)

$f'' \geq 0$

f'' tra (x_0, b)

$f'' > 0$

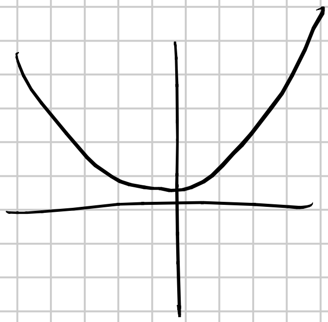
$f'' > 0$ in (a,b)

$\Rightarrow f$ è convessa in (a,b)

f è convessa in (a, x_0)
f è convessa in (x_0, b) $\Rightarrow$ ma non è globalmente convessa in (a,b)

Analog. f è derivabile 2 volte in (a,b)
f concava in (a,b) $\Leftrightarrow$ $f'' \leq 0$ in (a,b).

OSS. $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ è strett. convessa
$\cancel{\Leftarrow}$



$f(x) = x^4$ è strett. convessa
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2 \geq 0$ (non > 0)

OSS. f convessa in (a,b) è "abbastanza regolare"
Infatti f convessa in $(a,b) \Rightarrow f$ è continua in (a,b)
e inoltre $\exists$ $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ finiti $\forall x \in (a,b)$
(ci possono essere spigoli ma non cuspidi) tranne che agli estremi dell'intervallo

OSS. Se f è strett. convessa e derivabile in (a,b) ha al più un p.to stazionario ($f'(x_0) = 0$)
e questo sarà un minimo (globale)
$(f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in (a,b))$.

es. • $f(x) = e^x$ $\qquad (a,b) = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x$ $\qquad$ f è derivabile 2 volte su $\mathbb{R}$

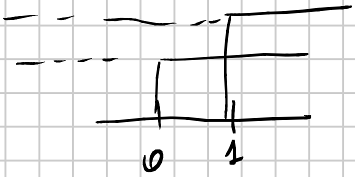
$f''(x) = e^x > 0$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ è strett. convessa

• $f(x) = \log x$, $x > 0$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$f(x) = \log x$ è strett. concava

• $f(x) = x^{\alpha}$, $x > 0$



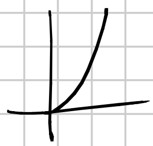
$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$

$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)\underbrace{x^{\alpha-2}}_{>0} > 0$ $\qquad \alpha > 0$, $\alpha > 1$

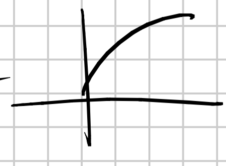
> 0 se $\alpha > 1$ o $\alpha < 0$

x^{α} sono strett. convesse sse $\alpha > 1$ o $\alpha < 0$

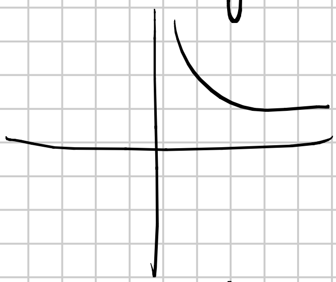
x^2 strett. convessa



$\sqrt{x}$ $\qquad \alpha = 1/2$ $\qquad$ strett. concava



$\frac{1}{x}$ $\qquad \alpha = -1 \qquad$ $\frac{1}{x}$ è strett. convessa per $x>0$



<u>Def.</u> $x_0 \in (a,b)$ è un p.to di <u>flesso</u> per f se $\exists$ un intorno di x_0 in cui f cambia concavità (x_0 deve essere tale che $\exists\, f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$)