14 Novembre

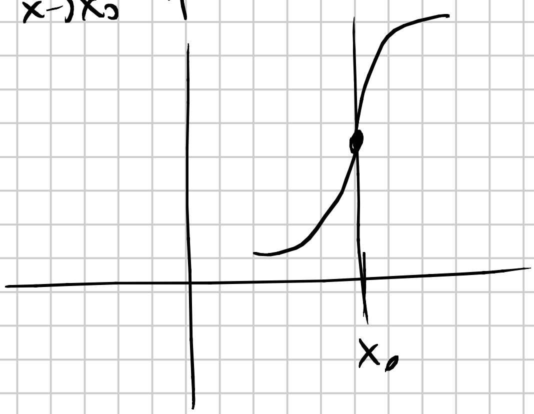
11 - 12.30 VM4 Tutorato
giovedì 21/11

ricevimento mio alle 9.30

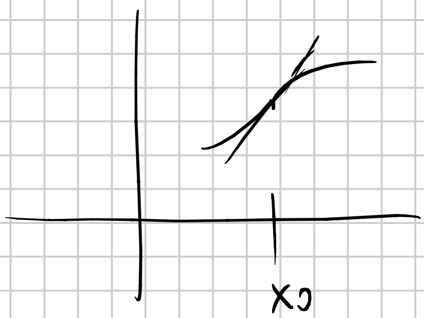
Funzioni convesse, flessi.

Def. $x_0 \in (a,b)$ è un punto di flesso per f se $\exists$ un intorno di x_0 in cui f cambia concavità (e $\exists\, f'(x_0) \in \mathbb{R}^*$)

se $f'(x_0) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to x_0} f'(x) = +\infty$



se $f'(x_0) \neq 0$

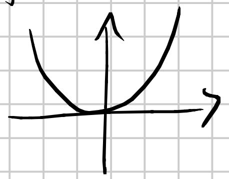


Teorema $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ punto di flesso, f derivabile due volte in $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

oss. se $f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ punto di flesso

$f(x) = x^4 \qquad x_0 = 0 \qquad f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$ $\qquad f''(0) = 0$ ma



$x=0$ non è flesso per $f(x)$.

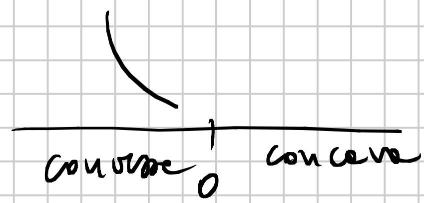
es.

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''(x) = 0 \Rightarrow -\operatorname{sen} x = 0$

$x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

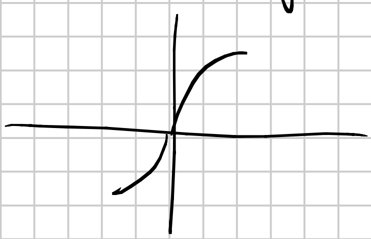


$x = 0$ è flesso?

$x < 0 \qquad f''(x) > 0$

$x > 0 \qquad f''(x) < 0$

$x=0$ p.to di flesso



$x = \pi \quad = \ldots\ldots$

es. $\quad f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x$

f è derivabile 2 volte $\forall x \in \mathbb{R}$

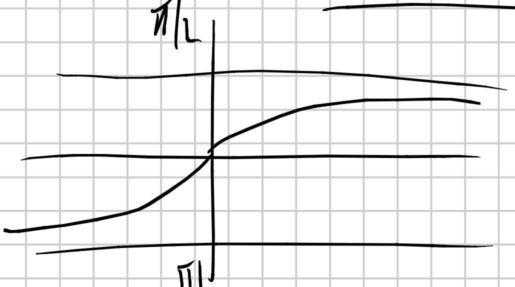
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x > 0$
$f'' < 0$

convesso $\qquad$ concavo

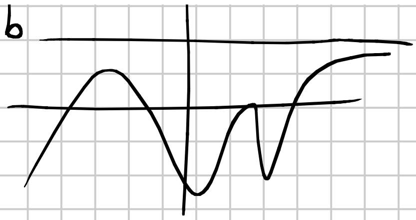
0

$x < 0$
$f'' > 0$



Asintoti

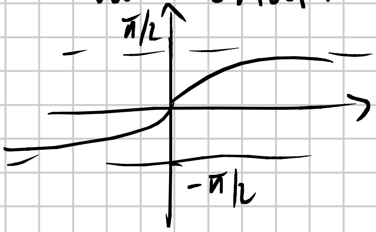
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$$



- f ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ in $y = b$

es. $f(x) = \operatorname{arctg} x$

ha asintoto orizzontale $y = \frac{\pi}{2}$ $\quad x \to +\infty$



$y = -\frac{\pi}{2}$ $\quad x \to -\infty$

- f ha un asintoto verticale in $x = x_0$

se $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

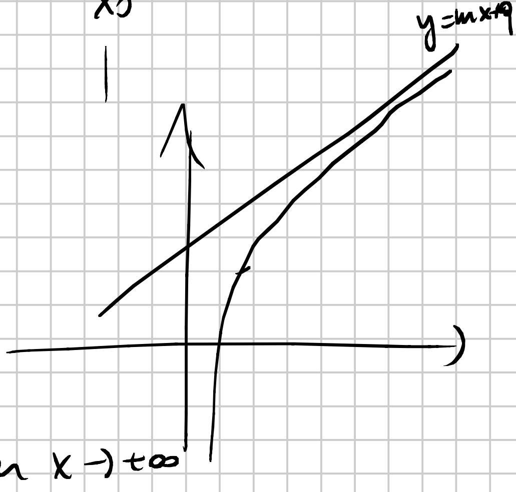
es. $f(x) = \frac{1}{x}$

ha asintoto verticale in $x = 0$

$f(x)$

- f asintoto obliquo

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$



$y = mx + q$ è asintoto obliquo per $f(x)$ per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

se $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(mx+q)\right)=0$

$\Updownarrow$ è equivalente a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x)-mx\right) = q \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Es. $f(x)=\sqrt{x^2+1} \qquad x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = 1$$

$m=1$

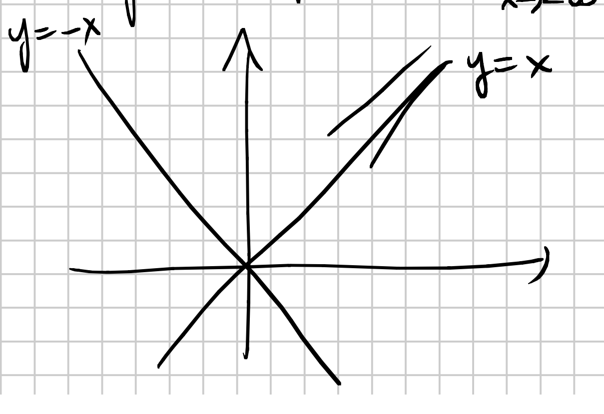
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\cancel{x^2}+1)-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0 = q$$

$y=x$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$

per $x\to-\infty$ $\qquad f(x)=\sqrt{x^2+1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$

poiché $f(x)$ è pari il grafico è simmetrico rispetto all'asse y



per simmetria $\quad y = -x \quad$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$

<u>Per Casa</u> Fare i conti per trovare asintoto obliquo per $x \to -\infty$

$$(y = -x)$$

<u>Es</u>

possibili asintoti di

$$f(x) = \log|e^x - 4| - \operatorname{arctg}(e^x - 5) - \lg 4$$

$$D: \{e^x \neq 4\} = \{x \neq \log 4\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

per x grande $e^x - 4 > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x-4)}{x} - \underbrace{\frac{\operatorname{arctg}(e^x-5)}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\lg 4}{x}}_{\to 0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x\left(1 - \frac{4}{e^x}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \lg\left(1 - \frac{4}{e^x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\lg\left(1 - \frac{4}{e^x}\right)}{x}}_{\to 0} = \underline{1}$$

Quindi $\frac{f(x)}{x} \to 1 \quad x \to +\infty \quad m = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \log(e^x - 4) - \operatorname{arctg}(e^x - 5) - \lg 4 - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\log\left(e^x-4\right)-x\right) - \frac{\pi}{2} - \log 4$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \log\left(e^x\left(1-\frac{4}{e^x}\right)\right) - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \cancel{x} + \log\left(1-\frac{4}{e^x}\right) - \cancel{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\frac{\pi}{2} - \log 4$$

asintoto obliquo per $x \to +\infty$ per $f(x)$.

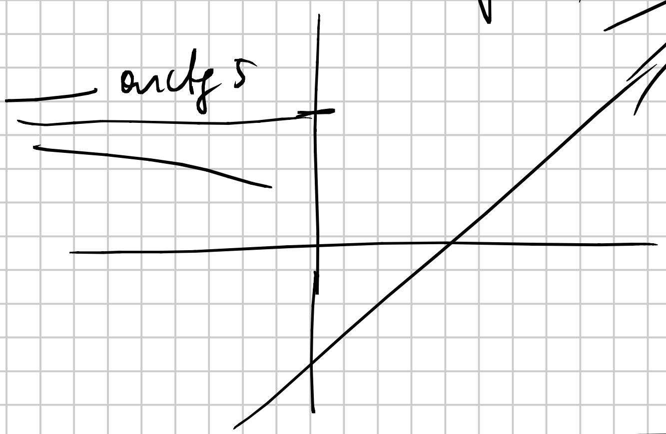
$$\boxed{y = x - \frac{\pi}{2} - \log 4}$$

$$f(x) = \log\left|e^x - 4\right| - \operatorname{arctg}\left(e^x - 5\right) - \log 4$$

$x \to -\infty$ $\quad f(x) \to \cancel{\log 4} + \operatorname{arctg} 5 - \cancel{\log 4}$

$f(x) \to \operatorname{arctg} 5$

asintoto orizzontale per $x \to -\infty$



Studio di grafici

1) dominio di definizione D
2) eventuali simmetrie (pari, dispari, periodica).
3) particolari sostituzioni che ci semplificano i conti
4) Studio del segno di f e degli zeri.
(non sempre è possibile)

5) limiti di f nei p.ti di frontiera di D ($+\infty$, $-\infty$ se D non è limitato).
e eventuali asintoti
eventuali p.ti di discontinuità.

6) regolarità di f: dove f è continua, dove è derivabile
Calcolo di f' (anche per vedere dove f è derivabile)
Individuare i p.ti di <u>non</u> derivabilità
p.ti angolosi, cuspidi, a tg. verticale

7) $f'(x)=0$ p.ti stazionari
studio del segno f' test di monotonia
applicato agli intervalli in cui f è derivabile

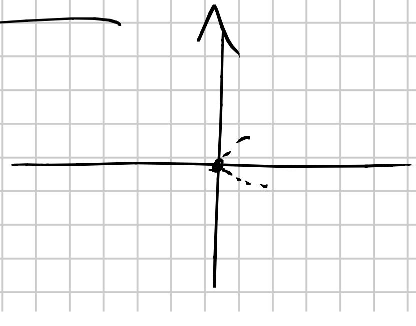
8) $\lim_{x\to x_0^+} f'$ $\qquad \lim_{x\to x_0^-} f'$ "attacchi"
x_0 sulla frontiera di D
o x_0 p.to di discontinuità di salto.

9) dove $\exists f''$, calcolarla
e studiarne il segno (se si può)
non sempre è indicato
regioni in cui è concava o convessa.

10) abbozzo del grafico.

<u>Es.</u> $f(x) = x \log|x|$

$D = \{x \neq 0\}$



$f(-x) = -x \log|x| = -f(x)$ dispari

$x > 0$

Considero per $x > 0$ $\qquad f(x) = x \log x$

$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$ (limite notevole)

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} x \log|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ la posso estendere per continuità

$f(x) = x \log x$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} x \lg x = +\infty$

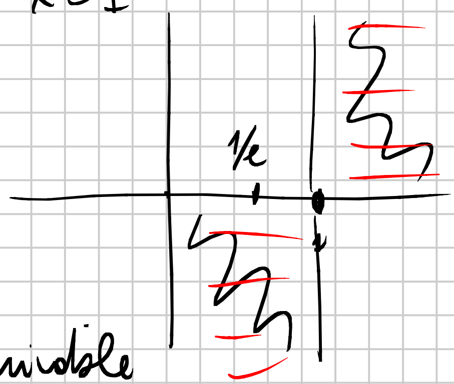
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \lg x = +\infty$

no asintoto obliquo.

segno di $f(x)$ $\qquad f(x) = x \log x \qquad x > 0$

$f(x) = 0 \iff \lg x = 0 \iff x = 1$

$f(x) > 0 \iff x > 1$

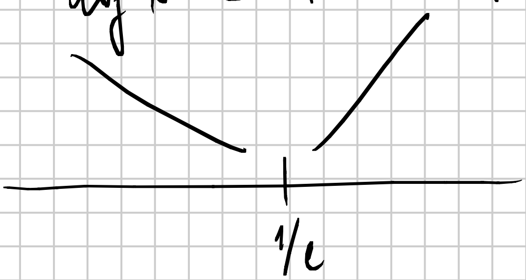


$f(x) = x \log x$

$\forall x > 0$ f continua e derivabile

$f'(x) = \log x + 1 = 0$ $\qquad f$ ha stazionari

$\log x = -1$ $\qquad x = \frac{1}{e} < 1$



$f' > 0$

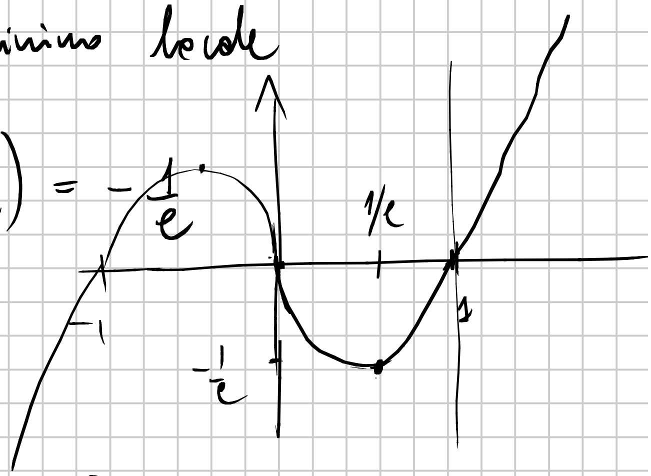
$\log x > -1$

$x > \frac{1}{e}$

$f' < 0 \qquad x < 1/e$

$x = \frac{1}{e}$ p.to di minimo locale

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\log\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$



$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (\log x + 1) = -\infty$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0 \qquad f \text{ strett. convessa}$$

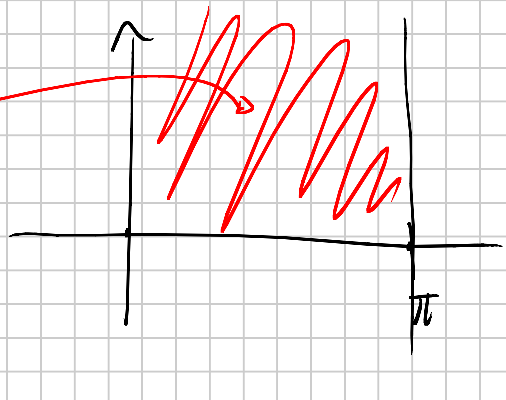
Es. $$f(x) = 3^{-\frac{1}{|\operatorname{sen} x|}}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Periodica di periodo π

$f(x+\pi) = f(x)$ verifica $(0,\pi)$

$f(x) > 0 \quad \forall x \in D$



$$\lim_{x \to 0^+} 3^{-\frac{1}{|\operatorname{sen} x|}} = 0$$

$$\lim_{x \to \pi^-} 3^{-\frac{1}{|\operatorname{sen} x|}} = 0$$